

## 第 I 部

## 常微分方程式

一つの独立変数  $x$  に関する未知関数  $y = y(x)$  に関して  $x$ 、 $y$ 、及び  $y' = \frac{dy}{dx}$ 、 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ 、 $\dots$ 、 $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$  と  $n$  階までの微分を含む関係式  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  を  $n$  階の常微分方程式という。

- 正規型：最高階数の未知関数について  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  と解けている形。
- 一般解： $n$  階の常微分方程式に対して  $n$  個の任意定数を含む解。
- 特異解：一般解に含まれない解。
- 特解：未知定数を含まない解。

## 1 求積法、(積分により解を求める)

関数  $y = y(x)$  を具体的に積分により求める。

## 1.1 変数分離型

$$y' = \frac{dy}{dx} = X(x) \cdot Y(y), \quad X(x) : x \text{ のある関数、} Y(y) : y \text{ のある関数}$$

$dx$ 、 $dy$  を形式的に分数とみなして積分せよ。

$$\int^y d\bar{y} \frac{1}{Y(\bar{y})} = \int^x d\bar{x} X(\bar{x}) + C \quad (\text{任意定数})$$

## 1.2 同次型

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f(t) : t \text{ のある関数}$$

$u = \frac{y}{x}$  として  $u$  に関する微分方程式を考える。(  $y = ux$ 、 $y' = u'x + u$  )

## 1.3 1階線型 (斉次)

$$y' + p(x)y = 0 \quad p(x) : x \text{ のある関数}$$

これは変数分離型。もしくは直接以下の解の形がわかる。

$$y(x) = Ce^{-\int^x dx_1 p(x_1)}, \quad C \text{ は任意定数。}$$

## 1.4 1階線型 (非斉次)

$$y' + p(x)y = q(x) \quad p(x), q(x) : x \text{ のある関数}$$

まず対応する斉次方程式を考え

$$y(x) = C(x)e^{-\int^x dx_1 p(x_1)}$$

の形を仮定して関数  $C(x)$  に関する微分方程式に帰着する。(定数変化法) 具体的に解を書き下すと

$$y(x) = (C_0 + \int^x dx_1 q(x_1) e^{\int^{x_1} dx_2 p(x_2)}) e^{-\int^x dx_1 p(x_1)}, \quad C_0 \text{は任意定数.}$$

### 1.5 完全微分型

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$P(x, y), Q(x, y) : x, y$  のある関数

この形の微分方程式が次の「積分可能条件」を満たすとき完全微分型という。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

この積分可能条件が満たされるとき、 $x, y$  の関数で  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$ 、 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$ 、をみたす  $\Phi(x, y)$  が存在し、 $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$  と書ける。よってこの一般解は

$$\Phi(x, y) = C, \quad C \text{は任意定数.}$$

なおこの  $\Phi$  は具体的には

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x dx_1 P(x_1, y) + \int_{y_0}^y dy_1 Q(x_0, y_1), \quad x_0, y_0 \text{は任意.}$$

と求められる。となる。もし積分可能条件が成り立たない場合でもある関数  $M(x, y)$  (積分因子) が存在し

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}$$

となる場合、 $MPdx + MQdy = 0$  を考えることにより解が求められる。

### 1.6 有名な微分方程式

(i) ベルヌーイの微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (n : \text{整数} \neq 1, 0)$$

$y^n$  で両辺をわり、 $u = y^{1-n}$  とせよ。

(ii) リッカチの微分方程式

$$y' + P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 = 0$$

特解  $y_1$  がわかれば、 $y = u + y_1$  とせよ。

(iii) クレーローの微分方程式 (特異解を持つ)

$$y = xy' + f(y')$$

$p = y'$  として両辺  $x$  で微分せよ。

$$\frac{dp}{dx} \left( x + \frac{df(p)}{dp} \right) = 0$$

- 一般解

$$\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow y = Cx + f(C), \quad C: \text{任意定数}$$

- 特異解

$$\begin{cases} x + f'(p) = 0 \\ y = xp + f(p) \end{cases}$$

$p$  を消去。

## 2 線形微分方程式

$P_n(x) = 1, P_{n-1}(x), \dots, P_1(x), P_0(x)$  及び  $Q(x)$  を与えられた関数として

$$L[y(x)] = \sum_{j=0}^n P_j(x) \frac{d^j}{dx^j} y(x) = y^{(n)}(x) + P_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + P_1(x)y'(x) + P_0(x)y(x) = Q(x)$$

を  $y = y(x)$  に関する  $n$  階の線形微分方程式という。

- 線形独立

$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$  なら  $C_1 = \dots = C_n = 0$  となるとき  $n$  個の関数  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  は線形独立であるという。

- ロンスキー行列式

$$W(x) = \det \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

で定義される  $W(x)$  をロンスキー行列式といい  $W(x) \neq 0$  であれば  $\{y_1, \dots, y_n\}$  は線形独立である。

### 2.1 線形性と重ね合わせの原理

- 斉次方程式と非斉次方程式

$Q(x) = 0$  の場合 斉次方程式、 $Q(x) \neq 0$  の場合 非斉次方程式という。 $y(x) = y_1(x)$  を非斉次方程式の特解 ( $L[y_1] = Q$ )、 $y(x) = y_0(x)$  を斉次方程式の一般解 ( $L[y_0] = 0$ ) とすれば、非斉次方程式の一般解は  $y(x) = y_1(x) + y_0(x)$  となる ( $L[y_0 + y_1] = Q$ )。

- 重ね合わせの原理

$y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  が斉次方程式の解であればその線形結合  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  も解となる。よって斉次方程式の  $n$  個の独立な解 (特解) が見つければ  $(y_1, \dots, y_n)$  一般解はそれらの線形結合  $\sum_{j=1}^n C_j y_j(x)$  となる。

### 2.2 定数係数方程式

$P_n(x) = 1, P_{n-1}(x), \dots, P_1(x), P_0(x)$  がすべて定数の場合を考える。(定数係数)

#### I 斉次方程式の一般解の求め方

まず  $y = e^{\lambda x}$  とせよ。つぎに

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda x}] &= f(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \\ f(\lambda) &= \sum_{j=0}^n P_j \lambda^j = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

より  $\lambda$  を特性多項式  $f(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) = 0$  の解として定める。

(a) 特性多項式が重根をもたない場合

$e^{\lambda_j x}$ ,  $j = 1, \dots, n$  がすべての独立な解。特に、実係数の場合、オイラーの公式  $e^{\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  に注意し、複素解  $\lambda_j = \lambda_R + i\lambda_I$  に関しては、複素共役解が存在することにより、 $e^{\lambda_R x} \cos \lambda_I x$ ,  $e^{\lambda_R x} \sin \lambda_I x$  を独立な解として用いてもよい。

(b) 特性多項式が重根をもつ場合

$\lambda = \lambda_j$  が  $k$  重根である場合。  $e^{\lambda_j x}$ ,  $x e^{\lambda_j x}$ ,  $x^2 e^{\lambda_j x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} e^{\lambda_j x}$ , を用いればすべての独立な解が得られる。実係数の場合、複素解  $\lambda_j = \lambda_R + i\lambda_I$  が  $k$  重根の場合、 $e^{\lambda_R x} \cos \lambda_I x$ ,  $x e^{\lambda_R x} \cos \lambda_I x$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} \cos \lambda_I x$ , 及び  $e^{\lambda_R x} \sin \lambda_I x$ ,  $x e^{\lambda_R x} \sin \lambda_I x$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} \sin \lambda_I x$  を用いてもよい。

II 非斉次方程式の特解の求め方

● 未定係数法

\*  $Q(x) = e^{\alpha x}$  の場合。

- ・  $\alpha$  が特性方程式の根でない場合  $\rightarrow y = C e^{\alpha x}$  として代入し  $C$  を決める。
- ・  $\alpha$  が特性方程式の単根の場合  $\rightarrow y = C x e^{\alpha x}$  として代入し  $C$  を決める。
- ・  $\alpha$  が特性方程式の  $m$  重根の場合  $\rightarrow y = C x^m e^{\alpha x}$  として代入し  $C$  を決める。

\*  $Q(x)$  が多項式の場合。

$y$  も同次数の多項式と仮定し、代入して係数を決める。

● 定数変化法

斉次方程式の一般解が求められていれば定数係数に限らず使える。ただしあまり効率的ではない。

$y_1(x), \dots, y_n(x)$  を斉次方程式の  $n$  個の独立な解とする。  $y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$  と仮定するとロンスキー行列  $\mathbf{W}$  を用いて

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_{n-1}(x) \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(x) \end{pmatrix}$$

から、これを  $W = \det \mathbf{W} \neq 0$  より  $C'_j(x)$  について解き  $C_j(x) = \int^x dx' Q(x') \frac{1}{W(x')} + C_j^0$  のように積分する (\* は  $x'$  のある関数)。

特に 2 階方程式の場合、 $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} y'_2(x) & -y_2(x) \\ -y'_1(x) & y_1(x) \end{pmatrix}$ , から  $C'_1(x) = -Q(x)y_2(x)$ ,  $C'_2(x) = Q(x)y_2(x)$ , よって一般解は  $C_1^0, C_2^0$  を任意定数として

$$y(x) = y_1(x) \left\{ \int^x dx' Q(x') \frac{-y_2(x')}{W(x')} + C_1^0 \right\} + y_2(x) \left\{ \int^x dx' Q(x') \frac{y_1(x')}{W(x')} + C_2^0 \right\}$$

となる。

### 2.3 演算子法による特解の見つけ方

$y = y(x)$  に関する、定数係数高階微分方程式は  $D = \frac{d}{dx}$  及び  $f(t)$  を  $t$  の多項式として

$$f(D)y(x) = Q(x)$$

と書ける。例えば  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (D^2 - 3D + 2)y = (D - 2)(D - 1)y$  と書ける。ここで任意の関数  $Q(x)$  に関して微分演算子  $f(D)$  の逆演算子  $\frac{1}{f(D)}$  を

$$f(D)\left[\frac{1}{f(D)}Q(x)\right] = Q(x)$$

により定義する。なお  $\frac{1}{f(D)}Q(x)$  は斉次の微分方程式  $f(D)y_0(x) = 0$  の解  $y_0$  の不定性をもつ。以下公式を述べる。

•

$$\frac{1}{D}Q(x) = \int^x dx_1 Q(x_1)$$

•

$$\frac{1}{D^n}Q(x) = \int^x dx_n \int^{x_n} dx_{n-1} \int^{x_{n-1}} dx_{n-2} \cdots \int^{x_2} dx_1 Q(x_1)$$

•

$$\frac{1}{D - \alpha}Q(x) = e^{\alpha x} \int^x dx_1 e^{-\alpha x'} Q(x_1)$$

•

$$\frac{1}{(D - \alpha)^n}Q(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{D^n} [e^{-\alpha x} Q(x)]$$

例えば、

•

$$\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x} \quad (f(\alpha) \neq 0)$$

•

$$\frac{1}{(D - \alpha)^n}e^{\alpha x} = \frac{1}{n!}x^n e^{\alpha x}$$

部分分数に分解すれば以上の公式から特解が求められる。

$$\frac{1}{f(D)} = \sum \frac{g(D)}{(D - \alpha)^{d_\alpha}}, \quad g(D) : \text{degree of } g(D) \text{ is less than } d_\alpha$$

特に  $Q(x)$  が多項式の場合 (例えば  $k$  次) は幕展開も有効。

$$\frac{1}{D - \alpha}Q(x) = \frac{-1}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{D}{\alpha}}Q(x) = \frac{-1}{\alpha} \sum_{j=0}^k \left(\frac{D}{\alpha}\right)^j Q(x)$$

### 3 連立微分方程式

$N$  個の  $t$  の関数  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_N = x_N(t)$  に関する定数係数線形の微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1N}x_N(t) + b_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2N}x_N(t) + b_2(t) \\ &\dots \\ \frac{d}{dt}x_N(t) &= \dot{x}_N(t) = a_{N1}x_1(t) + a_{N2}x_2(t) + \dots + a_{NN}x_N(t) + b_N(t) \end{aligned}$$

を考える。ただし  $b_1(t), \dots, b_N(t)$  は  $N$  個の与えられた関数とする。これをまとめて行列の形で次のように書く。

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{b}(t),$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$$

#### 3.1 斉次方程式

$\vec{b} = \vec{0}$  の場合を斉次方程式という。この解は  $\vec{x}_0$  を  $N$  個の未知定数からなる定数ベクトルとして、

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{x}_0, \quad e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n$$

となる。(一変数の場合の  $\dot{x} = ax(t)$  の解が  $x(t) = e^{at}x_0$  であることに注意。)

$N$  元連立 1 階の方程式は  $N$  階の 1 つの関数に関する微分方程式と書き直せるので未知定数を  $N$  個含むものが一般解となる。よって  $N$  個の独立な解  $\vec{x}_j(t)$  が求められれば一般解は以下のようにその線形結合となる。

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^N C_j \vec{x}_j(t) = \Phi(t)\vec{C}, \quad \Phi(t) = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N], \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

ここで独立な解からなる  $\Phi(t)$  を基本行列という。

#### Case 1: $\mathbf{A}$ が対角化可能な場合

$N$  個の固有値、 $\lambda_j$ 、 $j = 1, \dots, N$  に対して一次独立な  $N$  個の固有ベクトル  $\vec{v}_j$ 、 $j = 1, \dots, N$  があり  $\mathbf{A}\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$  となるので次の  $N$  個が独立な解となる。

$$\vec{x}_j(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_j = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$$

Case 2:  $\mathbf{A}$  が  $n$  重に縮退した固有値を持ち更に対角化できない場合

固有値、 $\lambda$ 、に対応する部分が次のような一般化された固有ベクトルを持つとする。

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_1 &= \vec{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_2 &= \vec{v}_1, \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\vec{v}_2 = \vec{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_3 &= \vec{v}_2, \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\vec{v}_3 = \vec{0} \\ &\dots \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v}_n &= \vec{v}_{n-1}, \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n\vec{v}_n = \vec{0} \end{aligned}$$

この場合、次の  $n$  個がこの縮退した空間の独立な解となる。

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_1 &= e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\vec{v}_1 = e^{\lambda t}\vec{v}_1 \\ \vec{x}_2 = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_2 &= e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\vec{v}_2 = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{I} + \frac{t}{1!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \right] \vec{v}_2 = e^{\lambda t} [\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] \\ \vec{x}_3 = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_3 &= e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\vec{v}_3 = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{I} + \frac{t}{1!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 \right] \vec{v}_3 = e^{\lambda t} \left[ \vec{v}_3 + t\vec{v}_2 + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_1 \right] \\ &\dots \\ \vec{x}_n = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_n &= e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\vec{v}_n = \dots = e^{\lambda t} \left[ \vec{v}_n + t\vec{v}_{n-1} + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_{n-2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\vec{v}_1 \right] \end{aligned}$$

### 3.2 非斉次方程式

斉次方程式の一般解がもたまっている時には非斉次方程式

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}(t)$$

の解は今までと同様に定数変化法により求められる。まず基本行列  $\Phi(t)$  を用いて

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^N C_j(t)\vec{x}_j(t) = \Phi(t)\vec{C}(t), \quad \Phi(t) = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N], \quad \vec{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{pmatrix}$$

と仮定する。よって  $\dot{\vec{x}} = \dot{\Phi}\vec{C} + \Phi\dot{\vec{C}}$ 。これを微分方程式に代入して  $\dot{\vec{C}} = \Phi^{-1}\vec{b}$ 。積分してまとめると

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t, t')\vec{b}(t') + \vec{x}(t_0) \\ \mathbf{G}(t, t') &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t') = e^{\mathbf{A}(t-t')} \end{aligned}$$

ただし  $t = t_0$  で  $\vec{x} = \vec{x}(t_0)$  とした。

### 3.3 微分方程式の定める軌道について

省略



## 4 微分方程式の級数解

$y = y(x)$  に関する次の 2 階の変数係数微分方程式を以下考える。

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad (*)$$

### 1 正則点のまわりでの級数解

(\*) の各係数が  $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-a)^n$ 、 $r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x-a)^n$  と  $x = a$  においてテーラー展開可能の時  $x = a$  を正則点という。このとき

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

と解もテイラー展開可能な形に求められる。この係数  $c_n$  は低次 ( $n$  の小さいもの) から順に

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{m=0}^{k-1} \{(m+2)(m+1)c_{m+2} + q_{k-m}(m+1)c_{m+1} + r_{k-m}c_m\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

により定まる。よって一般には  $c_0, c_1$  を任意定数としその線形結合としてすべての係数が決まる。

例. Legendre 方程式  $x = 0$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

### 2 確定特異点のまわりでの級数解

$x = a$  が (\*) の正則点でない場合にも  $\tilde{q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n(x-a)^n$ 、 $\tilde{r}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{r}_n(x-a)^n$  と正則な  $\tilde{q}(x)$ 、 $\tilde{r}(x)$  を用いて (\*) が次の形に書きなおせるとき  $x = a$  を確定特異点という。

$$y'' + \frac{1}{x-a}\tilde{q}(x)y' + \frac{1}{(x-a)^2}\tilde{r}(x)y = 0$$

このとき解を

$$y = (x-a)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

の形に仮定すると各係数は次の式をみだす。

$$\begin{aligned} f(\rho+k)c_k &= -\sum_{m=0}^{k-1} (m+\rho)(m+\rho-1) + q_{k-m}(m+\rho) + r_{k-m}c_m, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ f(\rho) &\equiv \rho(\rho-1) + q_0\rho + r_0 \end{aligned}$$

この係数  $c_m$  を低次から順に決めていくとすれば、まず  $m = 0$  について

$$f(\rho) = 0 \quad \text{決定方程式}$$

とすれば  $c_0$  は任意にとれる。以下  $m = 1, 2, 3, \dots$  については  $f(\rho + m)c_m = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  の一次式) となるので  $f(\rho + m) \neq 0$  であれば  $c_m$  が求められる。つまり、 $\rho$  を「決定方程式」 $f(\rho) = 0$  から決めれば (2 個の解を  $\rho_1, \rho_2$  とする) (1)  $\rho_1 - \rho_2$  が整数でない場合、 $\rho_1, \rho_2$  それぞれについてすべての係数が順に定まる。(2)  $\rho_1 - \rho_2$  が整数の場合、実部の大きい  $\rho$  に対してはすべての係数が決まるが小さい方については特別の工夫が必要。(フロベニウスの方法)

例. Bessel 方程式  $x = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$