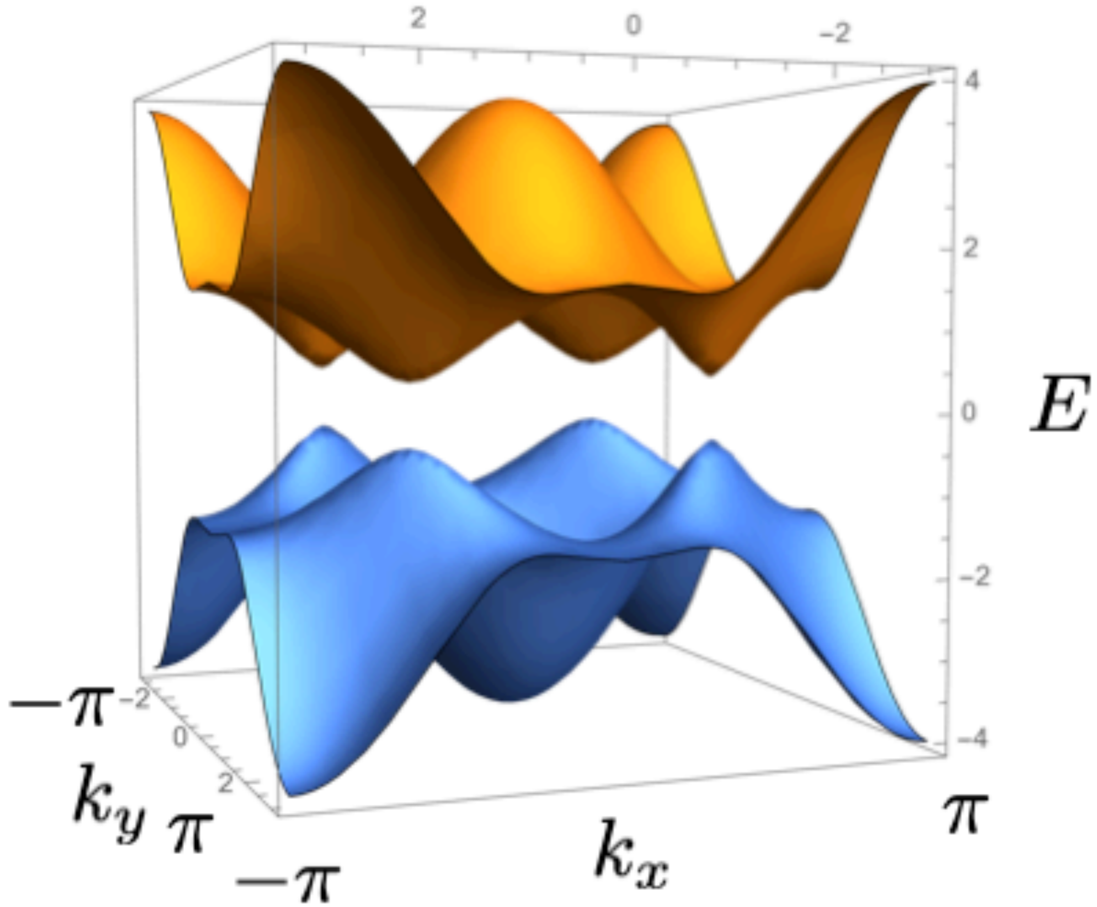
$d + id$ 波の超伝導

$\pm E(k_x, k_y)$



$t = 1, \Delta_{x^2-y^2} = 0.4$

$\Delta_{xy} = 0.2$

トポロジカル超伝導

$$h(k) = \begin{pmatrix} \xi(k) & \Delta(k) \\ \Delta^*(k) & -\xi(k) \end{pmatrix}$$

$$\xi(k) = 2t(\cos k_x + \cos k_y) - \mu$$
$$\Delta(k) = 2\Delta_{x^2-y^2}(\cos k_x - \cos k_y) + 2i\Delta_{xy}[\cos(k_x + k_y) - \cos(k_x - k_y)]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi(k)}{E(k)} &= \cos\theta(k), \\ \frac{\Delta(k)}{E_k} &= e^{i\varphi(k)}\sin\theta(k), \end{aligned}\right)$$

とすれば,

$$h(k)|k\rangle = |k\rangle E(k)$$

$$|k\rangle = \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta(k)}{2} \\ e^{-i\varphi(k)}\sin\frac{\theta(k)}{2} \end{pmatrix}$$

ベリー接続 $\boldsymbol{A}$ とチャーン数と呼ばれる量 C を次のように定義する.

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \equiv \langle k | \boldsymbol{\nabla}_k | k \rangle
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dk_x \int_0^{2\pi} dk_y \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x \right) \\
&\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{T^2} d^2k \left(\underset{R}{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{A} \right)_z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\boldsymbol{R}}(T^2)} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

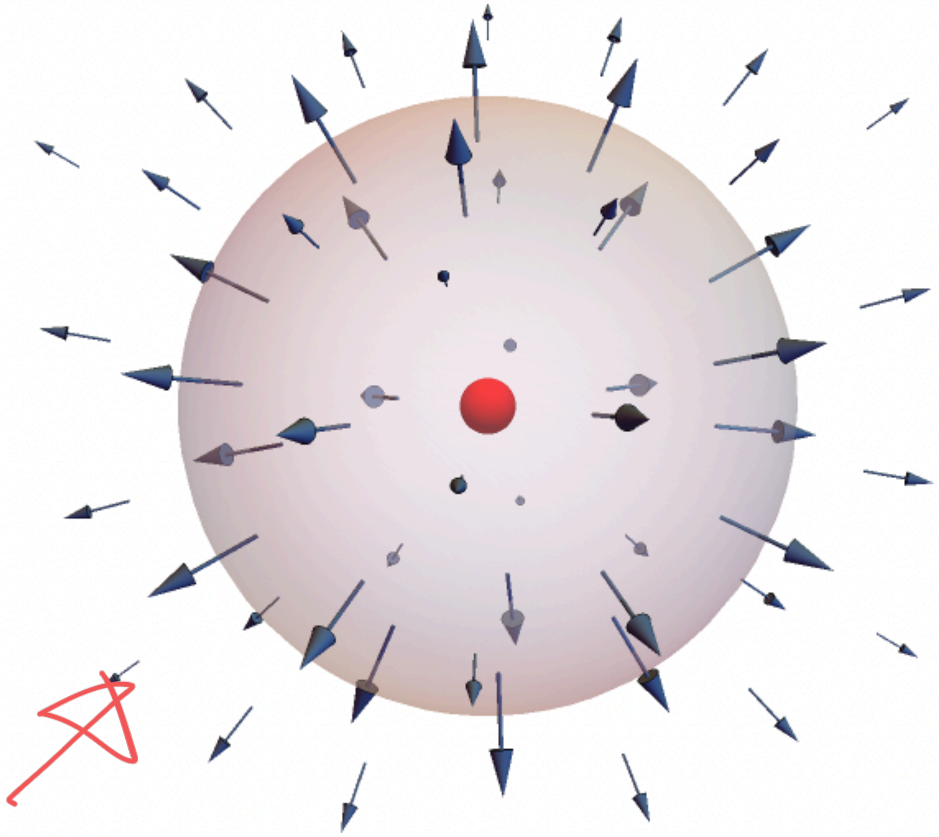


図 5: Dirac 単磁極とその磁場

詳細は議論する時間がないが，$\boldsymbol{B}$ は (θ, φ) を (緯度, 経度) としたときの三次元 (極座標) 空間での原点にある単磁極の磁束であり，$\hat{\boldsymbol{R}}$ は $h = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ と書いたときの $\boldsymbol{R}$ を規格化した曲面であって，原点を何度か囲み（被覆し），その被覆度がチャーン数 C となる。(図)

gap 有限

このＣはギャップがＹ有限な限り整数に量子化して，今の場合 Δ_{xy} が符号を変えるとき C も符号を変える。つまり量子化が破綻する点でのみ C は値を変えること

少し異なった見方では，$k_x - k_y$ 軸に Δ_{xy} 軸を人工次元として追加して，三次元パラメター空間内のエネルギー分散とみれば，$\Delta_{xy} = 0$ の平面内に Dirac cone が存在する。これは 3 次元のパラメター空間内の Weyl 点と呼ばれる。

$\langle k|\nabla k\rangle = A$

$H|k\rangle = |k\rangle \varepsilon$

少し補足すれば固有ベクトルは

$$|k\rangle = |k'\rangle e^{i\chi}$$

と書くこともできるので，$|k'\rangle$ について $\boldsymbol{A}'$ を定義すれば

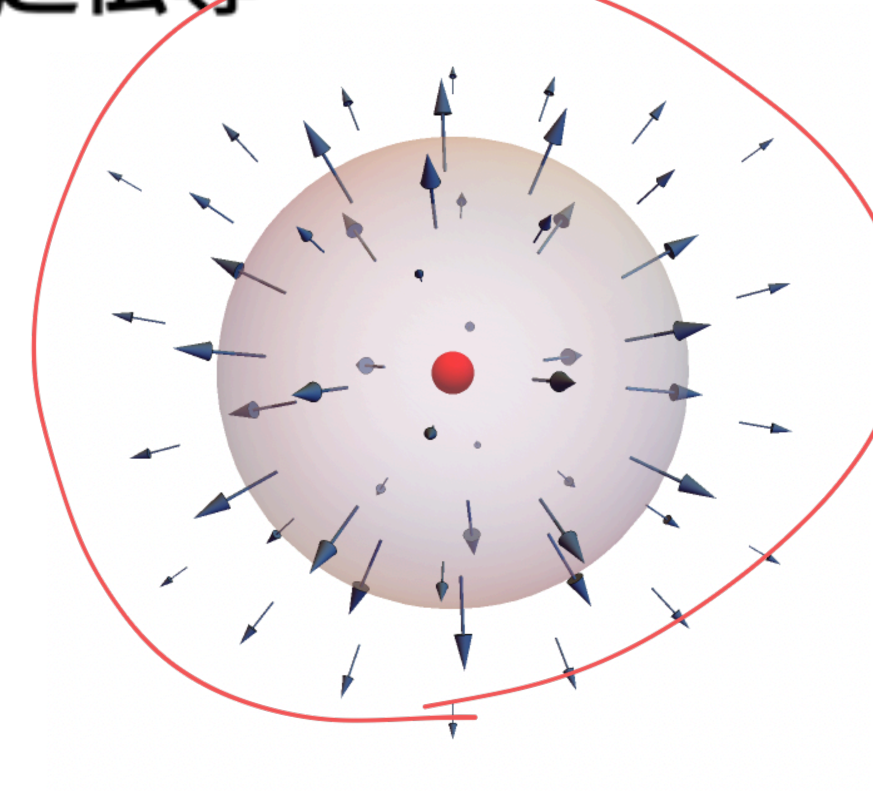
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + i\boldsymbol{\nabla}\chi$$

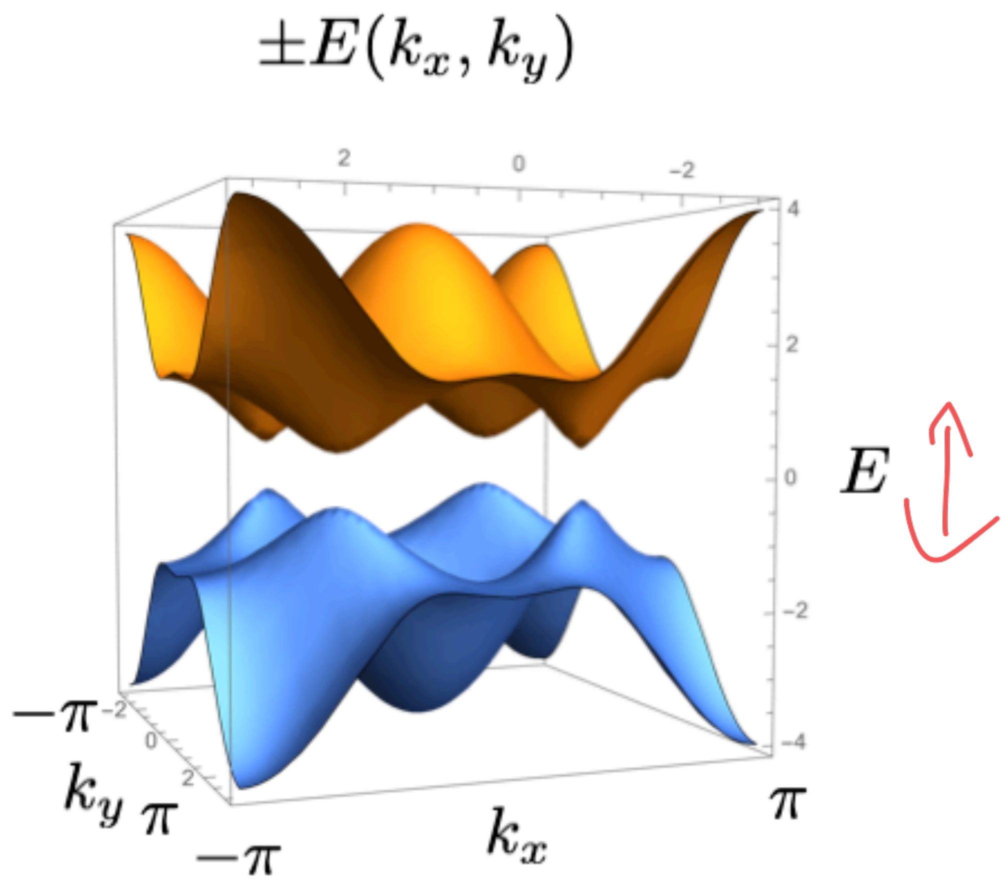
$A \to A'$

となるが，これは電磁気でのでゲージ変換と同型であり，このベリー接続 $\boldsymbol{A}$ は一種のベクトルポテンシャルである。なお $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\chi = 0$ であるから，このゲージ変換のもとでチャーン数は不変である。

トポロジカル超伝導

$d+id$ 波の超伝導





$t=1, \Delta_{x^2-y^2}=0.4$

$\Delta_{xy}=0.2$

また $\Delta_{xy}\neq 0$ でチャーン数が有限な場合，系に境界があると必ずエッジ状態とよばれる局在状態が系の端に存在することとなる。これは $d+id$ の超伝導相がいわゆるトポロジカル相として非自明であって，その非自明なトポロジカル相の特徴がエッジ状態として現れるのである。このバルクのトポロジカル数であるチャーン数とエッジ状態との関係はトポロジカル相一般に成立する関係であって「バルクエッジ対応」と呼ばれる (Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett.71, 3697 (1993))。