8.3　ギャップ方程式

$\boldsymbol{\alpha}_k$ の定義式を逆に解けば

$$\begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c^\dagger_{-k\downarrow} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha^\dagger_{-k\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ e^{-i\varphi_k} v_k & -e^{-i\varphi_k} u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha^\dagger_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$c_{k\uparrow} = u_k \alpha_{k\uparrow} + v_{k\downarrow} \alpha^\dagger_{-k\downarrow}$$

$$c_{-k\downarrow} = e^{i\varphi_k} v_k \alpha^\dagger_{k\uparrow} - e^{i\varphi_k} u_k \alpha_{-k\downarrow}$$

よって

$$\langle \alpha^\dagger_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle = \langle \alpha^\dagger_{k\downarrow} \alpha_{k\downarrow} \rangle = f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1}$$

に注意して

$$\begin{aligned} \langle b_k \rangle &= \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle \\ &= e^{i\varphi_k} u_k v_k (\langle \alpha^\dagger_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle - \langle \alpha_{k\downarrow} \alpha^\dagger_{k\downarrow} \rangle) \\ &= e^{i\varphi_k} u_k v_k (1 - 2f(E_k)) = e^{i\varphi_k} u_k v_k \frac{e^{\beta E_k} - 1}{e^{\beta E_k} + 1} \\ &= e^{i\varphi_k} \frac{1}{2} \frac{|\Delta_k|}{E_k} \tanh \frac{\beta E_k}{2} \\ &= \frac{\Delta_k}{2E_k} \tanh \frac{\beta E_k}{2} \end{aligned}$$

Δ_k の満たすべきセルフコンシステントな条件は

$$\boxed{\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_k}{2E_k} \tanh \frac{\beta E_k}{2}}$$

ギャップ方程式

ここでクーパー不安定性の議論にならって，以下のように引力はフェルミ面付近 $\hbar\omega_D$ でのみ働くとしよう。

$$V_{kk'} = \begin{cases} -g & |\epsilon_k - E_F|, |\epsilon_{k'} - E_F| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad , \; g > 0$$

これを用いてギャップ方程式を $\Delta_k = \Delta$: 定数 として絶対零度で次のように評価する。($\lim_{\beta\to\infty} \tanh\beta x = \cancel{2}\mathrm{sgn}(x)$ ステップ関数。$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2} > 0$, $\xi_k = \epsilon_k - E_F$)

11

$$\Delta = g\sum_k \int_{E_F-\hbar\omega_D}^{E_F+\hbar\omega_D} d\epsilon_k \, \frac{\Delta}{2E_k} = gD_F \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \, \frac{\Delta}{2E_k}$$

$$\boxed{1 = gD_F \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \, \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}}$$

$$1 = gD_F \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \sim gD_F \log \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}$$

$\hbar\omega_D / \Delta \gg 1$

$\xi = t\Delta$ として

$$\int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = \int_0^{\hbar\omega_D/\Delta} dt \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \sim \log \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}, \quad \frac{\hbar\omega_D}{D} \gg 1$$

なお $\frac{d}{dt} \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) = \frac{1 + \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

これよりクーパー不安定性と同様に無限小の引力で超伝導秩序が生じ $(\Delta > 0)$，更に g 依存性は非解析的である。

$$\Delta(T = 0) \sim 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{gD_F}}$$

さらに超伝導の転移温度 T_C はギャップ方程式で $\Delta = 0$ として ($\hbar\omega_D\beta_C \gg 1$)

$$\boxed{1 = gD_F\int_0^{\hbar\omega_D} d\xi\,\xi^{-1}\tanh\frac{\beta_C\xi}{2},\quad t=\beta_C\xi/2}$$

$$= gD_F \int_0^{\beta_C\hbar\omega_D/2} dt\,t^{-1}\tanh t$$

∞ $\gg 1$

$$= gD_F\left[\log t\tanh t\Big|_0^{\beta_C\hbar\omega_D/2} - \int_0^{\beta_C\hbar\omega_D/2} dt\,\frac{\log t}{\cosh^2 t}\right]$$

$$\sim gD_F\left(\log\frac{\beta_C\hbar\omega_D}{2} - C\right) = gD_F\log\frac{2e^\gamma\beta_C\hbar\omega_D}{\pi}$$

$$C=\int_0^\infty dt\,\frac{\log t}{\cosh^2 t} = -\log\frac{4e^\gamma}{\pi},\quad \gamma=0.577\ldots$$: オイラーの定数

これから

1.14

$$\boxed{k_BT_C = \frac{2e^\gamma\hbar\omega_D}{\pi}e^{-\frac{1}{gD_F}}} = 1.1387e^{-\frac{1}{gD_F}}$$

これが有名な BCS の結果である。