5.2.1 平均場近似での臨界現象

一般に相転移点においては特徴的長さスケールが無限大になることに対応して物理量に発散的振る舞いがみられる。その振る舞いは典型的長さが無限大となるため系のミクロスコピックな構造によらず、物理系の対称性、自由度、次元等、極めて基本的な性質のみによりそれらは決定されると考えられる。これが臨界点における普遍性 (Universality) とよばれる重要な概念である。この臨界現象に関して平均場近似の範囲内で以下少し詳しく議論しよう。

- T_C 以下の磁化の臨界現象

$\boxed{\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3}$

$B = 0$ として $T < T_C$, $(T \approx T_C)$ のとき、 m 十分小

$$\boxed{m = \frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta J z}{2\mu}m}$$

$$\approx \frac{\mu}{2}\left(\frac{\beta J z}{2\mu}m - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta J z}{2\mu}m\right)^3\right)$$

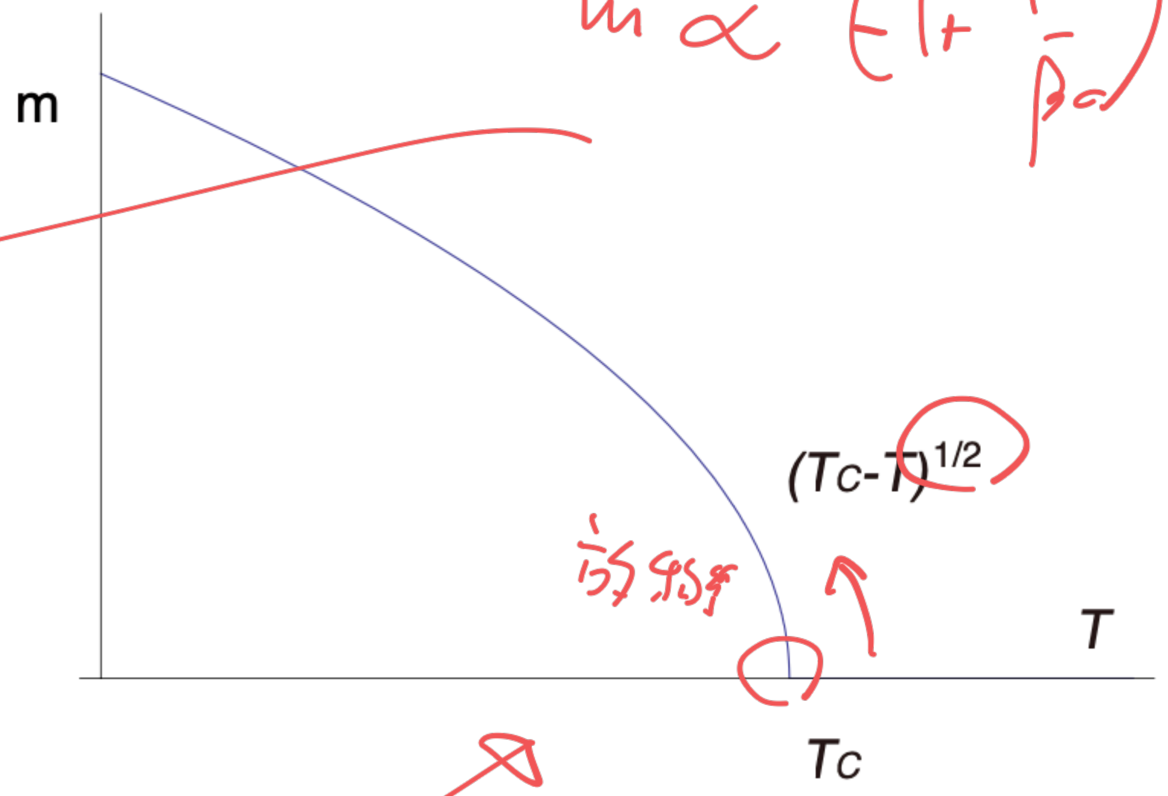
$$= \frac{\beta}{\beta_C}m - \frac{(\beta J z)^3}{48}m^3$$

$$(-1+\frac{\beta}{\beta_0}) = \frac{(\beta J z)^3}{48}m^2$$

$$m \propto (-1+\frac{\beta}{\beta_0})^{1/2}$$

$$\boxed{m \approx C\left(\frac{\beta}{\beta_C} - 1\right)^{1/2}}$$

$$\approx C'\left(\frac{T_C - T}{T_C}\right)^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$



平均場近似では universal

- $T > T_C$(臨界温度以上)での帯磁率の臨界現象

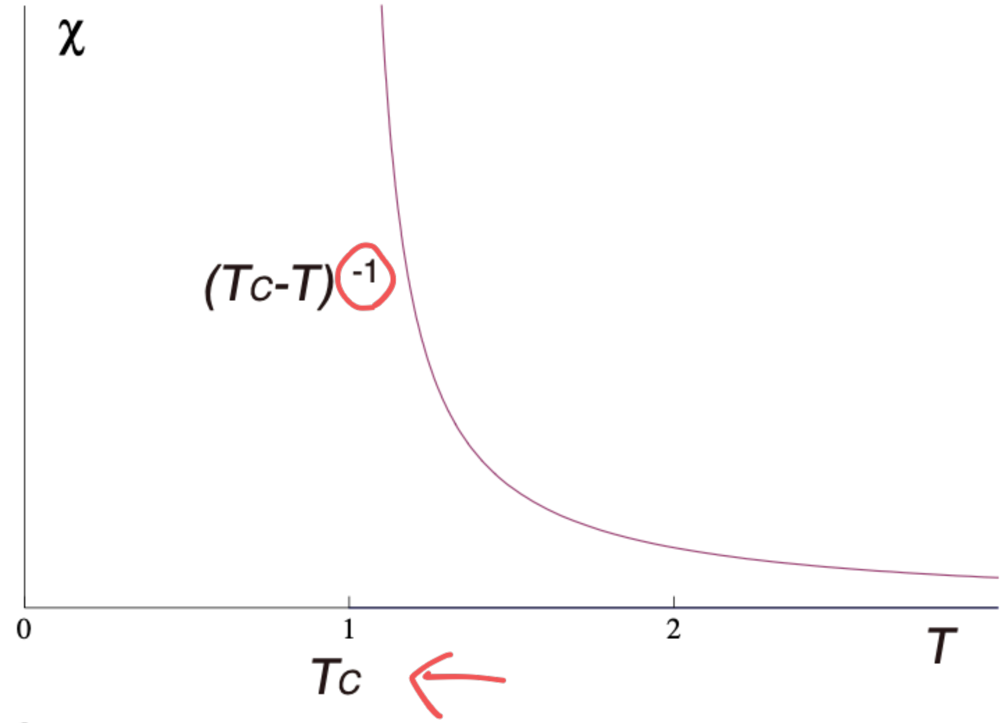
B と m が十分小さいとき

$$
\begin{aligned}
m =& \frac{\partial f}{\partial B_{\text{eff}}} = -\frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta\mu B_{\text{eff}}}{2} \\
=& -\frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta\mu}{2}\left(B-\frac{Jz}{\mu^2}m\right) \\
\approx& -\frac{\mu^2}{4}\beta\left(B-\frac{Jz}{\mu^2}m\right) = -\frac{\mu^2}{4}\beta B + \frac{Jz}{4}\beta m \\
\approx& -\frac{\mu^2}{4}\beta_C B + \frac{\beta}{\beta_C} m
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{\beta}{\beta_C}-1\right)m = CB
$$

$$
m \approx \left(\frac{T-T_C}{T_C}\right)^{-1} B
$$

$$
\chi = \left.\frac{dm}{dB}\right|_{B=0} \approx \left(\frac{T-T_C}{T_C}\right)^{-\gamma}, \quad \gamma = 1
$$



- 臨界点直上での磁化の臨界現象

こんどは臨界点 $\boxed{\beta = \beta_C = 4/(Jz)}$ として $m,\ B$ が十分小さいとして

$$\boxed{\cancel{m} = -\frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta_C\mu}{2}(B - \frac{Jz}{\mu^2}m) = -\frac{\mu}{2}\tanh\left(\frac{\beta_C\mu}{2}B - \frac{\beta_C Jz}{2\mu}m\right)}$$

$$= -\frac{\mu}{2}\tanh\left(\frac{\beta_C\mu}{2}B - \frac{2m}{\mu}\right)$$

$$\approx -\frac{\mu}{2}\left\{\frac{\beta_C\mu}{2}B - \frac{2m}{\mu} - \frac{1}{3}(\frac{\beta_C\mu}{2}B - \frac{2m}{\mu})^3\right\}$$

$$\approx \frac{\beta_C\mu^2}{4}B + \cancel{m} - \frac{1}{6}\frac{m^3}{\mu^2}$$

$$\boxed{B \approx m^3} = m^\delta, \quad \delta = 3$$

$m \propto B^{1/\delta}$

以上の $\beta,\ \gamma,\ \delta$ 等を臨界指数 (critical exponents) と呼ぶ。