5　局在スピンの磁性

5.1　相互作用するマクロな自由度 (More is different)

一つの自由度 s_1 を記述するハミルトニアンを $H(s_1)$ とするとき相互作用しないこの自由度が N 個 $s_1, s_2, \cdots, s_N$ と存在するときの全系のハミルトニアンは次のようになる

$$H(\{s_1, \cdots, s_N\}) = \sum_{k=1}^{N} H(s_k)$$

よって分配関数は

$$\begin{aligned} Z_N &= \mathrm{Tr}_{\{s_1,\cdots,s_N\}} e^{-\beta H(\{s_1,\cdots,s_N\})} \\ &= \mathrm{Tr}_{s_1} \mathrm{Tr}_{s_2} \cdots \mathrm{Tr}_{s_N} e^{-\beta \sum_k H(s_k)} \\ &= \prod_{k=1}^{N} \mathrm{Tr}_{s_k} e^{-\beta H(s_k)} \end{aligned}$$

となり 1 自由度系の自由エネルギー f を

$$e^{-\beta f} = \mathrm{Tr}_s e^{-\beta H(s)}$$

$Z_N = (Z_1)^N$

とすれば N 自由度系の自由エネルギー f_N は

$$e^{-\beta f_N} = Z_N$$

より

$$\frac{f_N}{N} = \bar{f} = f$$

となり自由度が N となっても自由度あたりの自由エネルギーは 1 自由度のままであり、$N \to \infty$ となっても多自由度系固有の現象はなにも起こらない。

これに対して自由度の間に相互作用が存在する場合、自由度間の協同現象が起こり得て、自由度 $N \to \infty$ とマクロになるとき N:(有限) の系とは質的に異なる現象が起こり得る。これを指して P.W.Anderson は次のように称した。

相互作用するマクロな系における協同現象

"More is different" (P.W.Anderson)

<u>自由度間の相互作用</u>

<u>マクロな自由度</u>

ここで上記 2 条件が本質的に重要であることに注意しよう。

5.1.1 孤立スピンの磁化

z 方向の磁場 B 中にある相互作用しない独立な N 個のスピンに対して自由エネルギーを求めておこう。まず 1 自由度の場合の系のハミルトニアンは

$$\boxed{H^0 = \mu B S^z,} \quad S^z = \pm\frac{1}{2}$$

$$e^{-\beta f} = \sum_{S^z=\pm\frac{1}{2}} e^{-\beta\mu B S^z} = 2\cosh\frac{\beta\mu B}{2}$$

$e^{-\beta H^0}$

$$f = -\frac{1}{\beta}\log\left(2\cosh\frac{\beta\mu B}{2}\right)$$

N スピンの時は一般論の通り

$$H_N = \mu B\sum_{k=1}^{N} S_k^z, \quad S_k^z = \pm\frac{1}{2}$$

$$e^{-\beta f_N} = \sum_{S_1^z=\pm\frac{1}{2}}\cdots\sum_{S_N^z=\pm\frac{1}{2}}\prod_k e^{-\beta\mu B S_k^z} = \boxed{\left(2\cosh\frac{\beta\mu B}{2}\right)^N}$$

$$\frac{f_N}{N} \equiv \bar{f} = f$$

平均の磁化 m は

$\to e^{-\beta H}$

$$m = \frac{\mu \sum_k \langle S_k^z \rangle}{N} = \frac{1}{N}\frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\sum_k S_j^z\right)$$

B

$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \sum_n \mu S_n}$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial(-\beta B)} = \frac{1}{N}\frac{\partial \log Z}{\partial(-\beta B)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial B}$$

$f = \log 2\cosh \frac{\beta \mu B}{2}$

$$= -\frac{\mu}{2}\frac{\sinh \frac{\beta\mu B}{2}}{\cosh \frac{\beta\mu B}{2}}$$

$$= -\frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta\mu B}{2}$$

$m = -\frac{\mu}{2}\tanh\frac{\beta\mu B}{2}$

よって帯磁率 χ は

$T \to +0 \quad \beta \to \infty \quad \tanh \to 1$

$m \to -\frac{\mu}{2}$

$$\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial B}\right|_{B=0}$$

$$= -\frac{\mu}{2}\frac{\beta\mu}{2}\left.\frac{1}{\cosh^2\frac{\beta\mu B}{2}}\right|_{B=0}$$

$$= -\frac{\mu^2}{4}\beta \propto \frac{1}{T}$$

$\beta = 1/k_B T$

この $1/T$ の温度依存性は孤立スピン系の特徴と考えられキュリー則としてよく知られている。