$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

ハバード模型のハミルトニアン

$[H, N] = 0$

$n_{i\uparrow} = c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow}$

$n_{i\downarrow} = c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}$

$n_i = n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}$

3.4 ハバード模型の対称性

ABC $\to (AB - BA)C$

$-BCA$ $\to +B(AC - CA)$

3.4.1 U(1) 対称性

まず，ハバード模型においては，$\boxed{\text{全粒子数 } \hat{N} = \sum_i n_i \text{ は保存する。}}$ これについて具体的に考えよう。

$[n_i, n_j] = 0$ だから，特定の対 $\langle i, j\rangle$ についてのホッピング（粒子の移動）を考えよう。$i \neq j$ の時，$[n_i, c_j] = 0$ だから

$c_i^\dagger c_i c_i^\dagger - c_i^\dagger c_i^\dagger c_i$

$H = -t\sum \boxed{c_i^\dagger c_j} + h.c. + U\sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$

相互作用項 H_{int}

$$
\begin{aligned}
[n_i + n_j, c_i^\dagger c_j] &= [n_i, c_i^\dagger]c_j + c_i^\dagger[n_j, c_j] \\
&= (c_i^\dagger c_i \cdot c_i^\dagger - c_i^\dagger \cdot c_i^\dagger c_i)c_j \\
&\quad + c_i^\dagger(c_j^\dagger c_j \cdot c_j - c_j c_j^\dagger c_j) \\
&= c_i^\dagger(1 - c_i^\dagger c_i)c_j \\
&\quad - c_i^\dagger(1 - c_j^\dagger c_j)c_j \\
&= c_i^\dagger c_j - c_i^\dagger c_j = 0
\end{aligned}
$$

$[n_i + n_j, c_i^\dagger c_j]$

$= [n_i, c_i^\dagger c_j] \quad [n_i, c_i^\dagger]c_j$

$+ [n_j, c_i^\dagger c_j]$

$c_i^\dagger [n_j, c_j]$

$[n_i, n_j] = 0$

$[H_{int}, n_i] = 0$

$[H_{int}, N] = 0$

これから

$$[H, \hat{N}] = 0$$

この結果はより基本的な観点である系の $U(1)$ 対称性に帰着することができる。これを以下説明しよう。

単一サイトのフェルミ演算子 c に対して

$$e^{i\theta c^\dagger c} c e^{-i\theta c^\dagger c} = e^{-i\theta} c$$

& h.c.

$$e^{i\theta c^\dagger c} c^\dagger e^{-i\theta c^\dagger c} = c e^{i\theta}$$

ここも +

$n^2=n,\ n^3=n\ \cdots$

$1-c^\dagger c$

単一サイトで $n = c^\dagger c$ として $n^2 = c^\dagger c c^\dagger c = c^\dagger(1-c^\dagger c)c = c^\dagger c = n$ に注意すれば

$$e^{an} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} n = 1 + (e^a - 1)n$$

$c^\dagger c + cc^\dagger = 1 = \{c, c^\dagger\}$

$cc^\dagger c$

だから $U = e^{i\theta n}$ に対して, $nc = 0$, $cn = c(1 - cc^\dagger) = c$ にも注意して

$$UcU^\dagger = e^{i\theta n} c e^{-i\theta n} = c e^{-i\theta n} = c(1 + (e^{-i\theta} - 1)n) = c + (e^{-i\theta} - 1)c = \boxed{e^{-i\theta} c}$$

$[1+(\cancel{e^{i\theta}-1})n]c \quad [1+(e^{-i\theta}-1)n]$

$c^\dagger c$

$$\mathcal{U} = e^{i\theta\mathcal{G}}, \quad \mathcal{G} = \hat{N} = \sum_{is} \hat{n}_{is}$$

$e^{i\theta g}\, i g H e^{-i\theta g}$ $e^{-i\theta g}$

$+\, e^{i\theta g} H (-i g) = 0$

$i e^{i\theta} (gH - Hg) e^{-i\theta} = 0$

に対して

$$\mathcal{U} c_{is} \mathcal{U}^\dagger = e^{-i\theta} c_{is}$$
$$\mathcal{U} c^\dagger_{is} \mathcal{U}^\dagger = c^\dagger_{is} e^{+i\theta}$$

より，ハバード模型のハミルトニアンは $c_{i,s} \to e^{-i\theta} c_{i,s}$ の大局的な位相変換に対して不変だから

$c_{is}^\dagger = e^{+i\theta} c_{is}^\dagger$

$$\boxed{\mathcal{U} H \mathcal{U}^\dagger = H}$$

$e^{i\theta g}$ $e^{-i\theta g}$

$c_{is}^\dagger c_{js} \to c_{is}^\dagger e^{i\theta} e^{-i\theta} c_{js}$

θ で微分して $\theta = 0$ とすれば

$i = j$ $= c_{is}^\dagger c_{is}$

$\to n_{is}$

$$[H, \mathcal{G}] = [H, \hat{N}] = 0$$

と粒子数 $\hat{N}$ は保存し，系の固有状態は粒子数演算子 $\hat{N}$ の同時固有状態にとれる。