

非可換ベリ一位相

初 貝 安 弘

1. 量子力学と位相

日常の世界での古典的な粒子（質点）の運動はニュートンの運動方程式により十分正確に記述されていますが、小さな系、極めて外乱を受けにくい系などの極限的な状況における運動はシュレディンガー方程式と呼ばれる、より基本的な法則で支配されていて、ニュートン方程式は近似的に成立するにすぎないことは実験的な事実です。金属中の電子は豆電球を点灯させるときには古典的な電荷の運動と考えられるわけですが、最近話題となっているナノ構造デバイス中の運動は量子力学による記述を必要とするわけです。マクロな世界での古典的運動が物理系の大きさが小さくなるにつれ量子力学による補正（量子補正）を受け、より小さなナノワールドでは補正では済まず、量子効果が本質的となります。今後の21世紀においては量子効果を本質的にもちいた、いわゆる量子デバイスが実現するでしょう。そこで実現する高度情報化社会においては量子効果は机上の空論ではなく、本質的に現象を決定する重要な因子となることに疑いはありません。

この量子的な世界観にたてば、粒子の運動は波動関数と呼ばれる「複素数」で表現されることとなります。古典的な粒子の運動は、ある時刻の粒子の場所を指定する座標である実数で表現されることと対比的です。複素数 $z = re^{i\theta}$ はその絶対値 r と位相 θ という2つの実数の組で表される

ことを考えると「位相」こそが量子効果の本質的部分であるということができるといえるでしょう。何らかの実験的観測を行ったときその時刻、場所に粒子が存在すると観測される確率は波動関数の絶対値の2乗として与えられます。その意味で絶対値は観測可能量となりますが、通常位相そのものは古典的な対応物がある物理量として観測されることはありません。しかしこれは何も波動関数の位相は観測できないことを意味するのではなく、干渉実験のような真に量子的な実験を行えば観測することができるわけです。例えば荷電粒子がソレノイド周りを運動する際、磁場に直接接触することはないにも関わらず、粒子の軌道が囲む磁束に対応した干渉効果を予言するアハロノフ・ボーム効果の実験的検証等がこの種の実験に対応します。^{1,2)} また近年その有効性が確認され、実現の現実的可能性が議論されるようになった量子計算機の実現のためにはこの量子干渉効果が観測にかかることが必須の条件です。

2. 定常状態と断熱定理

ニュートン方程式が粒子の座標の時間変化を記述するように、シュレディンガー方程式(1)は波動関数 $\Psi(t, \mathbf{r})$ の時刻 t における空間の各点 \mathbf{r} での値を規定します。この波動関数を Dirac の記法で $\Psi(t, \mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle$ と書いたときシュレディンガー方程式は次の形となります。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

ここで H は古典的にはエネルギーに対応するハミルトニアン演算子です。もし $H(t)$ が時間に依存しないときには波動関数に $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} |\psi\rangle$ 時間依存性を変数分離した形を仮定するとシュレディンガー方程式は $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, ($E = \hbar\omega$) という固有値方程式に帰着します。自明な時間依存性をもつこの波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ により記述される状態は定常状態とよべれます。以下、束縛状態とよばれる空間的に局在した粒子的な状態に関して考察を進めてみます。この時、エネルギーは $E = E_1, E_2, \dots$ と離散的な値をとります。ここで少し条件をゆるめて物理系は時間に依存するパラメータの組 $\mathbf{R}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots)$ により指定されハミルトニアンは明示的には時間に依存しないがパラメータ $\mathbf{R}(t)$ を経由して $H(\mathbf{R}(t))$ と時間変化するとしましょう。ここでシュレディンガー方程式による時間発展とは独立に

$$H(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle = E(\mathbf{R})|\mathbf{R}\rangle \quad (2)$$

という各時間 (スナップショット) ごとの固有値問題を考えることができます。ここでパラメータ \mathbf{R} 依存性を明示的に示しました。また各固有状態は $\langle \mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle = 1$ と規格化されているとします。

一方、波動関数の時間発展はこの固有値問題とは一般には無関係ですが、断熱定理 とよばれる重要な定理はつぎの事実を主張します。³⁾ 「スナップショットハミルトニアンの特定の束縛状態から時間発展を開始し、各固有値が孤立したままであり、なおかつパラメータの変化が十分にゆっくりしているとき、シュレディンガー方程式の解である波動関数は各時刻ごとのハミルトニアンの固有状態であり続ける。^{*1)}」

つまり、この断熱過程において $|\Psi(0)\rangle = |\mathbf{R}_0\rangle$ と初期状態 (時刻 0 とします) で固有値 $E(\mathbf{R}_0)$

*1) 特異性のないハミルトニアンに対して、注目する束縛状態と近接する状態のエネルギー間隔 Δ 、パラメータ変化の典型的時間 T として $T\Delta \gg \hbar$ が必要である。正確には文献³⁾。



図 1 断熱定理:断熱ポテンシャル中を急いで動かせばどこかに行ってしまうかこの鳥もゆっくり動かせばかごの中から逃げられません。

の束縛状態にあるとすれば、

$$H(\mathbf{R}_t) |\Psi(t)\rangle = E(\mathbf{R}_t) |\Psi(t)\rangle. \quad (3)$$

($\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}(t)$) と時刻 t でもスナップショットハミルトニアンの固有状態となります。

3. ベリー位相とゲージ変換

式 (3) は、断熱過程においては波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ が一般には無関係なはずのスナップショットハミルトニアン $H(\mathbf{R}_t)$ の固有値 $E(\mathbf{R}_t)$ の固有状態であることを意味します。固有方程式は斉次の線形方程式なので解の定数倍もまた解ですから、たとえ規格化の条件 $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1$ を要求してもその位相は断熱定理だけでは決定できません。しかしシュレディンガー方程式の解を次の形で探してもよいこととなります。

$$|\Psi(t)\rangle = |\mathbf{R}_t\rangle U(t) \quad (4)$$

あらかじめ準備しておいた $|\mathbf{R}\rangle$ からの位相のずれが U というわけです。ここで規格化の条件から $|U|^2 = 1$ が必要です。これをシュレディンガー方程式に代入することでこの位相因子 $U = e^{i\Gamma}$ は次の方程式を満たすことがわかります。^{*2)}

$$\dot{U}U^{-1} = -\langle \mathbf{R}_t | \dot{\mathbf{R}}_t \rangle - iE(\mathbf{R}_t)/\hbar \quad (5)$$

これを Γ について解けば、 $\Gamma(t) = \gamma(C) + \Gamma_0(t)$, $\Gamma_0(t) = -\int_0^t dt E(\mathbf{R}_t)$

$$\gamma_R(C) = -i \int_C A_\mu dx^\mu \quad (6)$$

$$A_\mu = \langle \mathbf{R} | \partial_\mu | \mathbf{R} \rangle \quad (7)$$

*2) $i\hbar(\dot{\mathbf{R}}_t U + |\mathbf{R}_t\rangle \dot{U}) = E|\mathbf{R}_t\rangle U$

となります。ここで微分は $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial R_\mu}$ というパラメータ空間内での微分を表し、系は時刻 0 から t までにパラメータ空間上の経路 C を動くとし、 $\Gamma_0(t)$ は定常状態の位相変化に対応するよく知られた項ですが、これ以外の経路 C に依存する位相である $\gamma(C)$ をその発見者にちなんでベリー位相と呼びます⁴⁾。

ここでいくつかの注意が必要です。まず、固有値問題 (2) は斉次の線形方程式ですから、上述のように $|\mathbf{R}\rangle$ 自体の位相も完全に任意であり不定です。そこで $|\mathbf{R}\rangle$ の代わりに、位相が $\omega = e^{i\theta}$, ($|\omega|=1$) 異なる、次の $|\mathbf{R}'\rangle$ を使うこともできます。

$$|\mathbf{R}\rangle = |\mathbf{R}'\rangle \omega = |\mathbf{R}'\rangle e^{i\theta} \quad (8)$$

これを直接代入すると

$$A_\mu = A'_\mu + \omega^{-1} \partial_\mu \omega = A'_\mu + i \partial_\mu \theta \quad (9)$$

と書けますが、これは Maxwell 方程式系でのゲージ変換とまったく同型の変換です。つまり異なる位相の固有関数を用いることは A_μ に関してゲージ変換を引き起こすのです。この A_μ は電磁場のベクトルポテンシャルとは直接関係ないものですが、逆にベクトルポテンシャルの拡張としてのゲージポテンシャルとして新しい意義をもちます。 $(\mathbf{R}$ は電磁場のように 4 次元である必要はなく、いくらでも高次元のものが考えられます) このゲージ変換 (8)(9) の下でベリー位相 γ_R は $\gamma_R = \gamma_{R'} + \Delta$ と Δ だけ変更を受けます。

$$\Delta = -i \int_C \omega^{-1} \partial_\mu \omega dx^\mu = \int_{\theta(C)} d\theta \quad (10)$$

このように γ_R は固有状態の位相の選び方に依存するので一般には意味を持ちませんが、経路 C がパラメータ空間で閉曲線をつくる、つまりパラメータの値がもとに戻る時には、変換 (行列) $\omega = e^{i\theta}$ の一価性 の要求の下で Δ は 2π の整数倍となることに注意しましょう。^{4,5)} つまり閉曲線 C に対してはベリー位相そのもの $\gamma_R(C)$ には 2π の整数倍の不定性がありますが、位相因子として $e^{i\gamma_R}$ は確定し、実験による量子的な観測量となり得ます。更に、この固有関数の不定性は

図 2 風向きの観測データをあつめた気象官はこの経路の中に低気圧が一つあると判断できるのででしょうか？

ここでの議論において極めて本質的であることに注意しましょう。例えば (7) などで微分概念が出てきますが、定義に立ち返れば

$$\partial_\mu |\mathbf{R}\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{R}(x + h \hat{x}_\mu)\rangle - |\mathbf{R}(x)\rangle}{h} \quad (11)$$

と考えるわけですが、勝手な 2 点での位相はまったく不定なのでこの極限は単純には存在せず微分すら定義されていないわけです。微分の定義のためには、経路上でなめらかな固有関数 $|\mathbf{R}\rangle$ を構成しておかなければなりません。上で述べたように固有関数の位相を変えることがゲージ変換をもたらしますから、これはなめらかなゲージを一つ固定することに対応します。つまり、なめらかなゲージ固定ごとにベリー位相 γ は確定し、ゲージに依存してベリー位相は 2π の整数倍の不定性をもつこととなります。この不定性は離散的ですので、連続変形できるゲージ変換で移りあうことはなく、この不定性をもたらすゲージ変換は「大きな (Large) ゲージ変換」と呼ばれます。具体例に対して数値的にこの微分を計算することを考えれば、ここでのゲージ固定の重要性は明らかでしょう⁵⁾。ゲージ固定により A_μ を確定したことはパラメータ空間上異なる 2 点間の相互関係である一つの「接続」が与えられていると考えられますのでこの A_μ はベリー接続とよばれることもあります。⁶⁾

基準 (ゲージ) の取り方は全く任意ですが、この基準に特異性があればその分だけ観測に不定性が生じるわけです。この状況を異なる例ですが、類似のわかりやすい例をとりあげて説明してみましょう。地球上図 (2) のように閉曲線上で風向きを測定することから閉曲線内に低気圧があるかどうかを決定することを考えてみましょう。この例では中に 1 つ風の吸い込みとしての低気圧があることはほぼ自明のように思われますが、この思考過程ではだれでも隣り合った地点での風向きを比

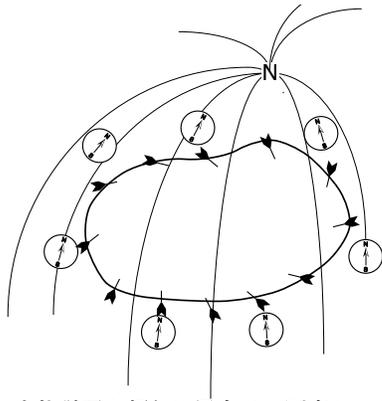


図3 方位磁石を頼りに風向きを測定したデータを聞いた日本の（新米の）予報官は自信を持って低気圧がこの経路内に1つあると判断するでしょう。

較していることに注意しましょう。比較するためには隣接2点間の風向きを示す矢印を重ねるわけですが、よく考えると重ねるための平行移動の過程に任意性があることに気づきます。^{*3)}このようなアприオリな平行移動の概念なしに低気圧の存在を確定するには例えば方位磁石を基準にすればよいことに気がつきます。つまり大局的に与えられた基準である方位磁石（ゲージ固定）と比較することで船の上で風向きのデータを集めるわけです。例えば、北極から十分離れた日本近海で観測した場合には、図(3)のようになります。この時、方位磁石を基準とした閉曲線上での風向きデータだけから（大局的考察なしに）この閉曲線のなかに低気圧が1つは最低限存在すると判断することができますでしょう。つぎに図(4)のように観測地点が北極近辺で閉曲線が北極を囲んでいる場合を考えてみましょう。この時の方位磁石による風向きの観測データは、常にほぼ北風が吹いていることを示しますから、そのデータのみを使えば、低気圧の存在には気がつかないかもしれません。

このように、大域的な基準であるゲージ固定の方法によって、風向きが定義する回転数は 2π の

*3) 実際の観測は決して連続した点すべてで行うことはできず、離散的な点でしか行えませんが、その離散的な点を用いても同様な考察ができることが格子ゲージ理論との関連から議論されています。^{5,7)}

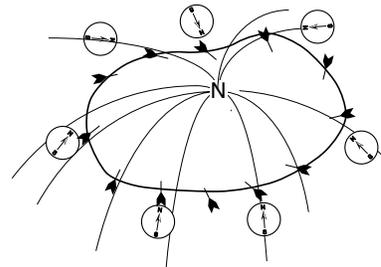


図4 北極近くで同じ観測をやったらどうでしょう？この時、どこで観測したのかを知らない（新米の）予報官は低気圧がこの経路内にあることに気づかないかもしれません。

整数倍だけ異なることになるわけです。ベリー位相の 2π の不定性はこのアナロジーにより理解することができます。

固有ベクトル $|\mathbf{R}\rangle$ は位相の自由度、つまりゲージの自由度の分不定ですが、固有空間への射影演算子 $P = |\mathbf{R}\rangle\langle\mathbf{R}|$ はゲージ不変量となりますのでこれとパラメータ空間内の経路上で一意的な状態 $|\phi\rangle$ （例えば固定された状態）を用いて

$$|\mathbf{R}\rangle_\phi = P|\phi\rangle N_\phi^{-1/2}, N_\phi = |\langle\mathbf{R}|\phi\rangle|^2 \quad (12)$$

を用いれば、 $N_\phi \neq 0$ の条件下でゲージ固定されたベリー接続が定義できることとなります。⁵⁾この $N_\phi = 0$ を与える点が低気圧の例での「北極」に対応し、特定の $|\phi\rangle$ によるゲージが特異になる点を与えます。実は、この特定のゲージが特異になる点はチャーン数とよばれる有名な位相不変量の特徴づけることともなります^{4,5,8,9)}。

4. 幾何学的位相としてのベリー位相

ベリーは断熱過程を考察することによりパラメータ空間内の経路のみに依存するいわば幾何学的な起源を持つ位相を発見しました⁴⁾。しかし歴史を振り返れば、同様な起源を持つ位相は他にもあり、量子世界においては極めて基本的な意義があることが近年認識されるようになりました。^{*4)}これら

*4) より広く光学および古典論においても類似の概念が重要な役割を果たすの現象もあることがベリー位相の発見以降、再認識されるようになりました。^{10,11)}

は総称して幾何学的位相と呼ばれ、広くベリー位相と呼ばれることもあります。例えば、「アハロノフ・ボーム効果」はベリー位相として幾何学的位相の典型例と見なすことができます。より古くはディラックの磁気単極子の発見¹²⁾、ならびに Wu-Yang による磁気単極子のゲージ理論としての幾何学的意義ならびに数学的構造（ファイバーバンドル）の記述¹³⁾ がベリー位相の発見以前から知られていました。さらには一般のゲージ場ならびに接続の理論は幾何学的観点から数学のみならず物理としてもベリーの発見時に既に一般的に整理された状況にありました。¹⁴⁾ ただしベリー位相の発見により、このゲージ構造は量子論至る所に極めて普遍的に存在することが広く認識されるようになったのだとは言えるでしょう。また、ベリー位相の発見と同時期に量子ホール効果においてホール伝導度のきわめて高い量子化はホール伝導度の幾何学的意義にあることが発見されました。^{8, 15)} ベリー位相の定義の際、仮想的なベクトルポテンシャルである A_μ が定義されたのですから、現実の電磁場の例を考えれば対応する磁場 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ を考えることは自然でしょう。この磁場から定義されるパラメータ空間全体での全磁束が前述のチャーン数と呼ばれる整数の位相不変量となり、この整数値が量子化されたホール伝導度を与えるのです。この発見はベリー位相の発見とともにその後の幾何学的位相及びトポロジカルな物理量が物性論において重要な役割をはたす種々の現象の鑄型として位置づけることができます。例えば異方的超伝導体、スピン軌道相互作用が重要な半導体におけるスピンホール伝導度の議論はその典型的な応用例と理解できます^{16~18)}。

5. 非可換ベリー位相

物理学においてはある理論が特定の現象を記述するとしても普通は必ずその適用限界があり、その限界を乗り越えるために理論の拡張が要求されます。そこでの理論的整合性を最も簡単に保つ方法は一成分の物理量を多成分とすることで、物理



図 5 断熱ポテンシャル中をゆっくり動かせば3羽の鳥は逃げられないわけですが、かごの中を動いて入れ替わることは許されるでしょう。

的には内部自由度と呼ばれます。ディラックによるスピン自由度の導入、通常の電磁場の拡張としての非可換ゲージ場の導入がその典型的な例と見なせるでしょう。

今まで $U(1)$ とよばれる位相の自由度に関するゲージ構造がベリー接続として束縛状態の断熱的時間発展に現れることをみてきましたが、断熱過程を少し拡張した状況で考えるとより一般に非可換ゲージ場としての構造がとてわかりやすい形で現れることがベリーの議論の直後に示されました¹⁹⁾。今まではスナップショットハミルトニアン束縛状態には縮退がないことを仮定してきましたが、この状態が M 重に縮退することをゆるしてみましよう。この時、断熱定理はパラメータの変化が十分ゆっくりであればこの縮退した固有空間内から出発した状態はシュレディンガー方程式による時間発展によってもこの固有空間から外にすることはないことを主張します。これによってパラメータ空間内での閉曲線上を系が動くとき、系の状態は位相変化を受けるだけでなく M 個の縮退した状態の適当な線形結合の状態に変化することが許されるわけです。つまり縮退のないときは位相変化を受けるだけでしたが、多成分の場合は固有状態の組はユニタリ変換の作用を受けることとなります。例えば図 (5) のように断熱的にゆっくり鳥かごを動かせば鳥は逃げられないが互いの場所を入れ替えることはできるというところでしょう。この時、 M 個の状態をまとめて

$$|\mathbf{R}\rangle = (|\mathbf{R}\rangle_1, \dots, |\mathbf{R}\rangle_M)$$

と書いて (4) の $|\Psi\rangle$ としても縮退した固有状態と一緒に考えるのが便利です。つまり波動関数とし

て多成分のものを考えることとなります。この縮退した空間を内部自由度とみなすわけです。対応して (5) での時間発展を記述する $U(t)$ がユニタリ行列となります。行列は一般に非可換ですから逐次近似で積分する必要がありますが、経路順序積 P を使って U は次のように書き下せます。^{*5)}

$$U = e^{i\Gamma_0} P \exp \left(-i \int_C \mathbf{A}_\mu dx^\mu \right)$$

$$\mathbf{A}_\mu = \langle \mathbf{R} | \partial_\mu | \mathbf{R} \rangle \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{R}_1 | \partial_\mu | \mathbf{R}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_1 | \partial_\mu | \mathbf{R}_M \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{R}_M | \partial_\mu | \mathbf{R}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{R}_M | \partial_\mu | \mathbf{R}_M \rangle \end{pmatrix}$$

ここで縮退の無いときと同様にスナップショットの固有状態の選び方は任意であることに注意しましょう。この任意性は縮退した状態間のユニタリ変換に対応しますから (8) の ω がユニタリ行列 ($\omega^\dagger = \omega^{-1}$) に拡張されることとなります。よって \mathbf{A}_μ の変換は^{*6)}

$$\mathbf{A}_\mu = \omega^{-1} \mathbf{A}'_\mu \omega + \omega^{-1} \partial_\mu \omega \quad (14)$$

とゲージ理論でよく知られたものとなりこの \mathbf{A}_μ が非可換のゲージポテンシャルを定義することになります。特にその $U(1)$ 部分と呼ばれる $\text{Tr} \mathbf{A}_\mu$ については $i\theta = \det \omega$ として $\text{Tr} \mathbf{A}_\mu = \text{Tr} \mathbf{A}'_\mu + i\partial_\mu \theta$ と (9) と同じ変換性を持ち、縮退のない場合とほぼ同様の意義をもちます。⁵⁾ この $U(1)$ 部分だけを議論する立場からは、完全な縮退は必ずしも必要でなく M 個の状態をまとめて考えることのみが本質となります。鳥かごは適当に広くてもよいというわけです。断熱性の仮定はこの場合、 M 個の状態が他の状態からエネルギー的に分離されていることだけを要求し M 状態間の相対的なエネルギーの縮退、分離は無関係となります。

近年の研究でこの非可換ベリー接続は単に断熱

*5) 0 から t までの時間を順に t_1, \dots, t_N と N 等分して

$$P e^{-i \int_C \mathbf{A}_\mu dx^\mu} = T e^{-i \int_0^t \mathbf{A}_\mu \dot{x}^\mu dt}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i \Delta t \dot{x}^\mu \mathbf{A}_\mu(x(t_N))} \dots e^{-i \Delta t \dot{x}^\mu \mathbf{A}_\mu(x(t_1))}$$

*6) $\partial_\mu | \mathbf{R} \rangle = (\partial_\mu | \mathbf{R}' \rangle) \omega + | \mathbf{R}' \rangle \partial_\mu \omega$

過程における時間発展現象のみならず、様々な物理現象、物理系に対して幾何学的位相の観点から普遍的な新しい概念と解釈を与えることがわかってきました。その応用の範囲は極めて広いのですが、いくつか例を挙げれば、平行スピン対を許す非ユニタリ状態等の一般的な異方的超伝導相の分類²⁰⁾、グラフェンと呼ばれる炭素2次元単層系でのディラック電子の量子ホール効果²¹⁾、(分数)量子ホール状態、スピン液体状態等、量子液体相における新しい秩序であるトポロジカル秩序、量子秩序等の議論²²⁾ 等において、この(非可換)ベリー接続は興味深い役割を果たすこととなります⁵⁾。

最後に非可換ベリー接続の適用例の一つだけ少し詳しく説明しましょう。ハニカム格子をつくるベンゼン環を2次元平面に無限に敷きつめた系はグラフェンと呼ばれ、近年実験的に構成されたため多くの興味を集めています。この系のフェルミエネルギー近傍の電子構造はエネルギー分散が運動量変化に対して線形のものとなり、通常の固体中で極めて有効な有効質量近似がそのままでは適用できずそのためゼロギャップ半導体とよばれる特異な系となります。これはその低エネルギーの有効理論が、自由電子もしくはホールにより記述されず、ある種の相対論的なディラック電子となることを意味します。この系に磁場をかけるとランダウ縮退は通常と同様に生じますが、そのエネルギー間隔は等間隔とはなりません。さらにその量子ホール効果を考えるとホール伝導度に特異な量子化則が生じ(図6)、また特異なエッジ状態が重要な役割を果たします。この系における量子ホール効果の研究の際に非可換ベリー位相、ならびにベリー接続が有効に使われました²¹⁾。グラフェンではそのハニカム格子に起因する格子の効果が本質的であり、実験で観測されるような弱磁場極限であっても、起因するエネルギー準位に極めて小さなエネルギーギャップが多数存在します。そのため、個々の一電子状態ごとのホール伝導度を求めることには困難となりますが、フェルミ球全体としての多電子系のベリー接続を扱うことにより物理的なエネルギーギャップが仮定できれば理論的取り扱い

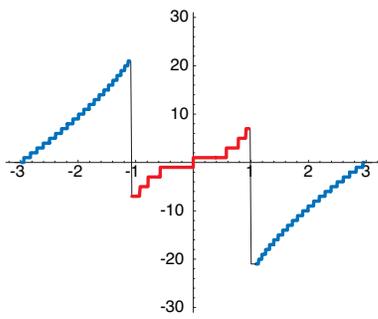


図 6 グラフェンにおける量子化されたホール伝導度を e^2/h を単位としてフェルミエネルギーの関数としてしめたもの。青線部分は電子またはホールによる通常の量子化ホール伝導度を示し、赤線部分のゼロエネルギー近傍ではホール伝導度の量子化則は特異なディラック電子型となります²¹⁾。

がきわめて容易になります。技術的にはフェルミエネルギー以下の全ての一電子軌道からなる非可換ベリー接続を構成し、その $U(1)$ 部分を計算することで多電子系のホール伝導度を求めることができることとなります。

非可換ベリー位相の解説を目標にその基礎から最近の研究例までご紹介してきましたが、パラメーターを含む量子系における固有値問題という極めて一般的であり量子物理学の至る所にあらわれる基本的な設定のなかにゲージ構造がとてわかりやすい形で存在することが理解していただければ、幸いです。今後ベリー位相等、幾何学的位相の現代の物理における重要な意義はより広範囲の現象の中で明らかとなっていくことは間違いないと思われまます。

参考文献

- 1) Y. Aharonov and D. Bohm. *Phys. Rev.*115, p. 485, 1959.
- 2) A.Tonomura and et al. *Phys. Rev. Lett.*48, p. 1443, 1982.
- 3) A. Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover, 1999.
- 4) M. V. Berry. *Proc. R. Soc.*, A392, p. 45, 1984.
- 5) Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 73, p. 2604, 2004, 74, p. 1374, 2005, 75, p. 123601, 2006.
- 6) 例えば Y.-S. Wu and H.-Z. Li. *Phys. Rev. B*38, p. 11907, 1988.
- 7) T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki. *J. Phys. Soc. Jpn.*74, p. 1674, 2005.

- 8) D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale, and M. den Nijs. *Phys. Rev. Lett.* 49, p. 405, 1982.
- 9) M. Kohmoto. *Ann. Phys. (N.Y.)*160, p. 343, 1985.
- 10) S. Pancharatnam. *Proc. Ind. Acad. Sci. A*44, p. 247, 1956.
- 11) J. H. Hannay. *J.Phys.A:Math.Gen.*18, p. 221, 1984.
- 12) P. A. M. Dirac. *Proc. R. Soc.*, A 133, p. 60, 1931.
- 13) T. T. Wu and C. N. Yang. *Phys. Rev. D* 12, p. 3845, 1975.
- 14) T. Eguchi, P.B.Gilkey, and A.J.Hanson. *Phys. Rep.*66, p. 213, 1980.
- 15) トポロジカルな観点からのレビューとして例えば Y. Hatsugai. *J. Phys. C, Condens. Matter*9, p. 2507, 1997.
- 16) Y. Morita and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*62, p. 99, 2000.
- 17) S. Murakami, N. Nagaosa, and S.-C. Zhang. *Science*5, p. 1348, 2003.
- 18) J. Sinova and et al. *Phys. Rev. Lett.*92, p. 126603, 2004.
- 19) F. Wilczek and A. Zee. *Phys. Rev. Lett.*52, p. 2111, 1984.
- 20) Y. Hatsugai, S. Ryu, and M. Kohmoto. *Phys. Rev. B*70, p. 054502, 2004.
- 21) Y. Hatsugai, T. Fukui, and H. Aoki. *Phys. Rev. B*74, p. 205414, 2006.
- 22) X. G. Wen. *Phys. Rev. B*40, p. 7387, 1989.

(東京大学大学院工学系研究科)