4　分数と整数

以上整数量子ホール効果に関する位相幾何学的記述について説明したきたが、この節で分数量子ホール効果との関連を説明したい。本質的には分数量子ホール効果を整数量子ホール効果に帰着させることを試みる。その過程でいくつかの重要な概念を学ぶこととなる。

4.1　Berry Phase

磁場中の運動に典型的に現れる波動関数の位相の重要性は Berry の断熱過程における波動関数の位相の解析をきっかけとして「幾何学的位相」として重要な概念となった。[31, 32, 35, 36] この幾何学的位相についてここで簡単にまとめておきたい。

まず、ハミルトニアンがあるパラメター $\vec{R}$ に依存するとしよう。

$$H = H(\vec{R})$$

一方各パラメター $\vec{R}$ も時間依存性を持ち得るとして各時間ごとの（スナップショット）ハミルトニアンの固有値問題を

$$H(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle$$

とする。このとき初期条件

$$|\Psi(t=0)\rangle = |n(\vec{R}(t=0))\rangle$$

を満たすシュレディンガー方程式の解 $|\psi\rangle$ はすべての時間で E_n が離散スペクトルに属しており、ハミルトニアンの時間依存性が十分ゆっくりしている場合には断熱定理により、

$$H(\vec{R})|\Psi\rangle = E_n(\vec{R})|\Psi\rangle$$

をみたす。よって縮退のない場合

$$|\Psi\rangle = e^{i\theta}|n(\vec{R})\rangle$$

と位相のみ変化しうることとなる。この位相に重要な物理的意味の存在することを Berry は指摘したのである。この表式をシュレディンガー方程式 $i\hbar\dot{|\Psi\rangle} = H|\Psi\rangle$ に代入すれば[27]

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, E_n} e^{i\gamma}|n(\vec{R})\rangle \\ \gamma &= i\int d\vec{R}\cdot\langle n|\vec{\nabla}n\rangle \end{aligned}$$

この γ を Berry Phase といい、幾何学的位相の典型例である。[28]

---

[27]

$$\begin{aligned} i\hbar\Big(i\dot{\theta}|n\rangle + |\dot{n}\rangle\Big) &= E_n|n\rangle \\ -i\hbar\dot{\theta} + i\hbar\langle|\dot{n}\rangle &= E_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= i\int dt\,\langle n|\dot{n}\rangle - \frac{1}{\hbar}\int dt\, E_n \\ &= i\int d\vec{R}\cdot\langle n|\vec{\nabla}n\rangle - \frac{1}{\hbar}\int dt\, E_n \end{aligned}$$

[28] M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A 392, 45 (1984)

これを磁場中の電子の運動に適用してみよう。空間 $\vec{R}$ における電子系をベクトルポテンシャル中で断熱的に移動させることを考えよう。まず $\vec{R}$ 周りの物理系のハミルトニアンとして

$$H(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A},\vec{r}-\vec{R}(t))$$

を考える。そこでまずベクトルポテンシャルのない場合の固有値問題が解けているとして

$$H(\vec{p},\vec{r}-\vec{R})|n_0(\vec{R})\rangle = E_n|n_0(\vec{R})\rangle$$

とするとベクトルポテンシャルのある場合のハミルトニアン $H(p+\frac{e}{c}\vec{A})$ に対するスナップショットの固有値問題

$$H(p+\frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle = E_n|n(\vec{R})\rangle$$

の解は

$$|n(\vec{R})\rangle = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,\cdot\,\vec{A}(\vec{r})}|n_0(\vec{R})\rangle$$

となる。[29] よって[30]

$$\begin{aligned} i\gamma &= -\int d\vec{R}\,\cdot\,\langle n|\vec{\nabla}_R\rangle \\ &= -i\frac{e}{\hbar c}\int d\vec{R}\cdot\vec{A}(\vec{R}) + \langle n_0|\vec{\nabla}_R n_0\rangle \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルの存在により

$$e^{-\,i\frac{2\pi}{\Phi_0}\int d\vec{R}\,\cdot\vec{A}(\vec{R})}$$

だけ余分な位相変化を受けることとなる。特に $\vec{R}$ が閉曲線 ∂S を作る場合その位相変化は

$$\begin{aligned} \gamma &= -2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \\ \Phi &= \int_S d\vec{S}\cdot\vec{B}, \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \end{aligned}$$

となる。

29

$$\begin{aligned} (\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle &= (\hbar\frac{\vec{\nabla}}{i}+\frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle \\ &= -\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})|n(\vec{R})\rangle + e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,\cdot\,\vec{A}(\vec{r})}\vec{p}|n_0(\vec{R})\rangle + \frac{e}{c}\vec{A}|n(\vec{R})\rangle \\ &= e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,\cdot\,\vec{A}(\vec{r})}\vec{p}|n_0(\vec{R})\rangle \end{aligned}$$

$$H(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A})|n(\vec{R})\rangle = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}\,\cdot\,\vec{A}(\vec{r})}|n_0(\vec{R})\rangle$$

30

$$\begin{aligned} i\gamma &= -\int d\vec{R}\,\cdot\,\langle n|\vec{\nabla}_R\rangle \\ &= -i\frac{e}{\hbar c}\int d\vec{R}\cdot\vec{A}(\vec{R}) + \langle n_0|\vec{\nabla}_R n_0\rangle \\ &= -i\frac{2\pi}{\Phi_0}\int d\vec{R}\cdot\vec{A}(\vec{R}) + i\gamma_0 \end{aligned}$$

4.2 分数統計粒子

分数量子ホール効果の議論並びに今後の議論でにおいて重要な分数統計粒子についてここで議論したい。これは幾何学的位相のもっとも初期の重要な例であり、統計変換等の関連で多体問題においてもいくつかのおもしろい応用がある [33, 34, 35]。

量子力学においては同種粒子多体系を考えよう。この系のハミルトニアン $H(\{\vec{r}_j\})$ は粒子の座標を $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N$ としたとき粒子 i, j を入れ替える演算子 P_{ij} として入れ換えに対して不変であるから

$$[H, P_{ij}] = 0$$

を満たす。これより N 粒子系の多粒子系の波動関数 $\Psi(\{\vec{r}_j\})$ として H と P_{ij} の同時固有状態がとれる。さらに粒子分布密度 $|\Psi|^2$ は入れ換えで不変であるから P_{ij} の固有値は絶対値が 1 となる。

$$\Psi(\cdots, \vec{r}_i, \cdots, \vec{r}_j, \cdots) = e^{i\theta}\ \Psi(\cdots, \vec{r}_i, \cdots, \vec{r}_j, \cdots)$$

ここで一般の次元においては粒子を２度入れ替える操作はなにもしないことと同じ（連続に変形できる）ので波動関数それ自身に対しても不変であることを要求する。(よりていねいな議論は経路積分による。時間があれば講義では説明したい) よって $P_{ij}^2 = 1$

$$e^{i\theta} = \pm 1$$

この２つがボーズ統計、フェルミ統計に対応する。つまり一般の次元ではこれらの２つの統計しか許されない。

一方空間２次元においては、右回りに粒子を入れ替える操作と左回りに入れ替える操作は (２次元平面内では）連続に変形できず、異なるものと考えられ $P_{ij}^2 \neq 1$ としてもよい。これに対応して

$$\text{統計角}\ \theta = \text{任意}$$

となる。これらの統計に従う粒子系を分数統計粒子系、Anyon と呼ぶ。

$$\frac{\theta}{\pi} = \begin{cases} 0, \pm 2, \pm 4, \cdots & \text{ボーズ粒子系} \\ \pm 1, \pm 3, \cdots & \text{フェルミ粒子系} \end{cases}$$

となる。

この分数統計にしたがうある粒子が他の粒子のまわりを一周する過程を考えるとこの過程が粒子の入れ替え２回と等価であることに注意すると、一周する過程での位相変化は $e^{i2\theta}$ であることを注意しておく。

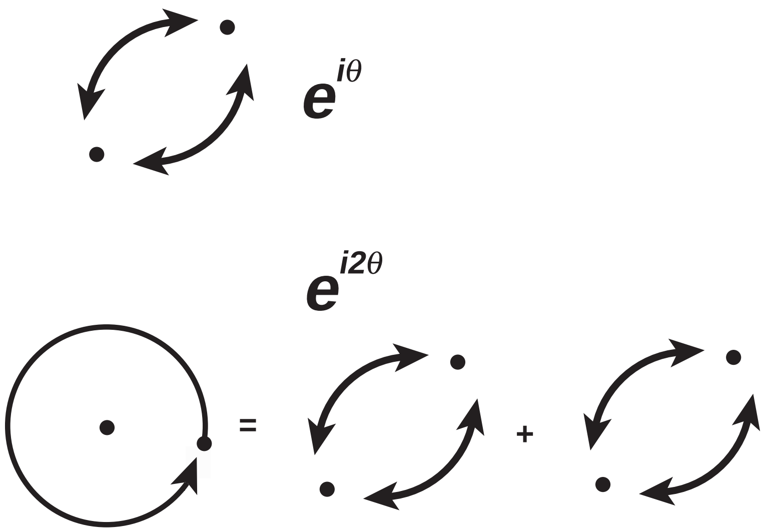

図 27: 分数統計 (Anyon) と分数統計粒子がお互いを囲んで運動したときの位相変化

この粒子の統計に起因する位相を Aharonov-Bohm 効果による (Berry Phase) ものと考えると、分数統計粒子 (Anyon) は粒子と磁束の管の複合粒子と考えることができる。さらにこれらの分数統計粒子系を経路積分により記述するとこの磁束の管からの AB 効果は古典的運動方程式には影響を与えない、時間の全微分、いわゆるトポロジカル項を Lagangian に付加することにより記述されることがわかる。(時間があれば Web でアップします。)

4.3 磁束の切り張り (Composite Fermion, 1/2 Fermi Liquid 状態, Anyon 超伝導...)

N_e 個粒子密度 ρ の θ 分数統計粒子がプラケット当たり ϕ の磁場の下にある状況を考えよう。このときある粒子が面積 S の閉曲線を囲む運動をする過程を考える。この過程において分数統計の効果で波動関数の位相が変化する効果を取り込むことを考える。正確には粒子をいくつ囲んだかに依存するわけだが、まず、ここでは平均としての位相の効果を議論しよう [35]。

粒子の囲む面積が S であった場合、平均的にはこの面積中に粒子は $N_e=\rho S$ 個あり、一つの粒子当たり移動した粒子とのペアあたり、2θ の位相変化を受けるので全体としては統計性からの寄与として $2\theta N_e$ の位相変化を受けることとなる。

更に一様磁場からの位相への寄与は $2\pi\phi S=2\pi N_\phi$ の位相変化をうけるので総計この過程において

$$2\theta N_e+2\pi N_\phi=2\pi N_e\left(\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu}\right),\quad (\nu=\frac{N_e}{N_\phi})$$

の位相変化を受けることとなる。

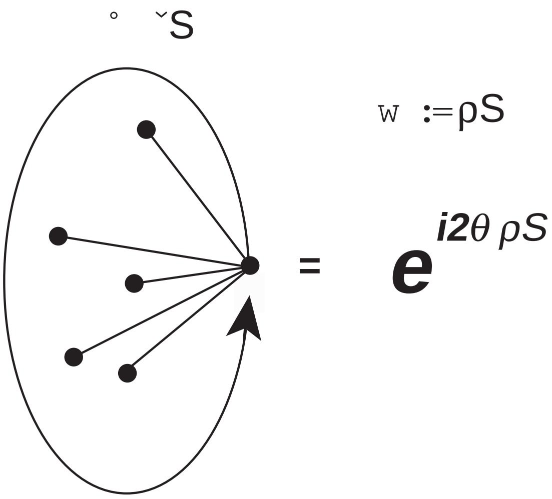

図 28: 磁場中の分数統計粒子系の平均場近似

ここで次の仮定を置こう。

Adiabatic Heuristic Argument: (Jain, Wilczek) [24, 35] [31]
全磁束が変化しない過程においては少なくとも長距離の物理は変化しない。

これを信じれば次の微分方程式の解として得られる系は断熱的につながっていることとなり長距離の物理に関しては同等となる。つまり分数統計を与える仮想的な磁束と実際の磁束とをその総和を一定としてやりとり（切り張り）しても物理の本質は変わらないと主張するのである。(どのような状況でこの仮定が本当に正当化できるのか、エネルギーギャップの存在、相互作用、特異点の保存、その他この点の議論が本質的に重要である。)

Adiabatic heuristic: 磁束のやりとり

$$d(\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu})=0$$

の系は断熱的に連続である。

(これは非常に強い仮定であり、必ずしも成立するわけではないが、種々の場合にこの概念で議論できる物理系も多いのである。)

ここで ν は系が量子ホール効果を示す場合には通常のランダウ準位の占有率となる。

この主張に従い、$\theta=-\pi$ (通常のフェルミ統計に従う電子) $\nu=n$:整数 すなわち普通の整数量子ホール状態 $\sigma_{xy}=n\frac{e^2}{h}$ を含む系列を考えよう。具体的には上記微分方程式の $\theta=-\pi$, $\nu=n$ を通る解曲線を求めてみる。この解曲線は容易にわかるとおり $\frac{\theta}{\pi}+\frac{1}{\nu}=-1+\frac{1}{n}$ と $-1/\nu$-θ 図上で直線であらわされる。この直線上に重要な系が含まれているのである。

[31] Jain, Phys. Rev. Lett. 63, 199, (1989)

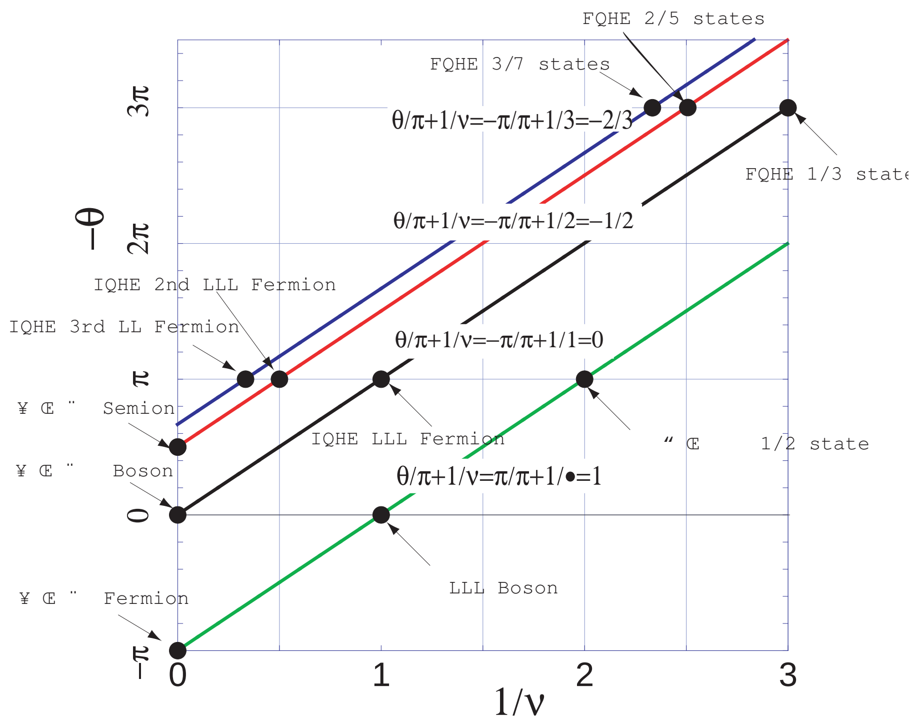

図 29: 断熱原理による種々の物理系の整理

ここで $\theta = -m\pi$:m は奇数の場合を考える。つまり２粒子を入れ替えたときの位相が $e^{-im\pi} = -1$ であるから粒子系はやはりふつうのフェルミ統計に従う電子系に断熱的につながる系をを考えるのである。このときのランダウ準位の占有率は

$$\nu = \frac{n}{(m-1)n+1}$$

となるが、分母の $(m-1)n+1$ は奇数であり、これが分数量子ホール効果をおこす状態であると考えるのである。(Jain の構成法)。すなわち分数量子ホール効果をおこす系は整数量子ホール効果の系と長距離の物理に関しては同等であると主張する。

もう一つのコメントとして $n = 1$ の場合、この直線は原点を通るすなわち、$\theta = 0$, $\frac{1}{\nu} = 0$ ($N_\phi = 0$): 磁場のない (ハードコア) ボゾン系をもその系列に含む。よって $\nu = 1/m$ 状態は磁場のない (ハードコア) ボゾン系に帰着することをも主張する。(２次元ハードコアボゾン系での Quasi Long Range Order をここでの議論から量子ホール効果におけるものへ読み直すことができる。ただそこにでてくる相関関数は近距離の演算子の２体相関という形ではなく切り張りした磁束の効果をとりこむために”ストリング”型の長距離なものとなる。量子ホール効果においては系にエネルギーギャップがあるため通常の（準）長距離秩序の形成は起こらないが、ストリング型の秩序変数は基底状態の波動関数の位相の構造をうまく拾い出していると考えることができよう。この点で次元さえ異なるが１次元整数スピン系（Haldane 系) でのストリング秩序との類似に注意しておきたい。)

さらに磁場のない系は、$\nu = \infty$ と考えられるのでこの系を含む系列を考えるとこの系は

$$\nu = \frac{1}{2}$$

状態を含むと考えられ、これがフェルミ液体的状態であることを支持する。

以上 Adiabatic Heuristic の議論に従い断熱的につながると考えられるいくつかの系列をまとめてみよう。

1. $\theta = -\pi,\ \nu = 1$ を含む系列。
   - 磁場のない系のボーズ粒子
   - 最低ランダウ準位を完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 1$
   - 分数数量子ホール状態 $\nu = 1/3, 1/5, 1/7 \cdots$ [24]
2. $\theta = -\pi,\ \nu = 2$ を含む系列。
   - 磁場のない $\theta = \pi/2$ 分数統計粒子系（セミオン）(RPA 計算等によりで超伝導状態であるとされている [?, 39]。)
   - ランダウ準位を 2 つ完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 2$
   - 分数数量子ホール状態 $\nu = 2/5$
3. $\theta = -\pi,\ \nu = 3$ を含む系列。
   - ランダウ準位を 3 つ完全に埋めた整数量子ホール状態 $\nu = 3$
   - 分数数量子ホール状態 $\nu = 3/7$ [24]
4. $\theta = -\pi,\ \nu = 5$ を含む系列。

   $\cdots$
5. $\theta = -\pi,\ \nu = \infty$ を含む系列。
   - 偶数分母状態 $\nu = 1/2$ [37]
   - ランダウ準位を 1 つ完全に埋めたボーズ粒子系
   - 磁場なしフェルミオン系（自由フェルミ粒子系）

4.4 もう一つの分数統計, 排他的分数統計

量子ホール効果においては先ほどでてきた Anyon としての分数統計の他にパウリの排他律を拡張した排他的分数統計があらわれ、これも面白い [40, 41]。

これについて少し議論してみよう。

まず、フェルミ粒子とボーズ粒子の異なるところを振り返ってみれば、多粒子系の波動関数が粒子の入れ換えについてどのように振る舞うかがあり、これに関しては、よく知られており、その拡張が、いわゆる Anyon であったわけである。

特にフェルミ粒子系に対しては、この入れ換えの位相の効果は「フェルミ粒子は同一の状態には 1 つの粒子しか存在できない」というパウリの原理として知られる厳しい条件を要求することもよ

く知られているであろう。具体的にはたとえば、10 サイトの系において 4 個のフェルミ粒子が存在するときの状態数（縮退度）は

$$W_F = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = 210$$

であるが、ボーズ粒子系の場合は同一の状態にいくつでもはいれるから、いわゆる重複組み合わせとして 10+4-1 個のものを並べたものから 3 個の粒子の位置を選んで左から状態に対応させれば (| ◯ || ◯ ◯| :5 サイトに ◯ 3 個の例)

$$W_B = \begin{pmatrix} 10+4-1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!} = 715$$

となり、フェルミ粒子とボーズ粒子を明らかに区別する。これを一般化しよう。まず、最初に D_0 個のサイトがあって今すでに N 個粒子があるとし、さらに次に導入しようとする粒子が占めうる可能な場合の数を $D(N)$ とする。するとフェルミ粒子の場合はすでに占められているところにはパウリの原理で入ることができないので $D^F(N) = D^0 - N$, ボーズ粒子系の場合は他の粒子の存在に全く関係せず、$D^B(N) = D^0$ となる。まとめて

$$\begin{aligned} Fermion : D^F = D^0 - N &= D^0 - 1\cdot N \\ Boson : D^B = D^0 \quad &= D^0 - 0\cdot N \end{aligned}$$

となる。これを拡張して α （排他的）統計粒子系においては

$$\begin{aligned} \alpha - \text{統計粒子系} : D^\alpha &= D^0 - \alpha\cdot N \\ \Delta D &= -\alpha\Delta N \end{aligned}$$

とすることで”統計”を拡張することを試みがありいくつかの興味深い系においてうまく記述できることがわかっている [40, 41]。

ここで少しこの議論を進めておこう。以下この拡張された α 統計粒子系からなるグランドカノニカル集団を考えよう。ただし粒子系が自由粒子であるとしその一粒子エネルギーを ϵ として全エネルギーは

$$E = N\epsilon$$

となることを仮定しよう。まず、この系の縮退度は

$$W = \begin{pmatrix} D^\alpha(N) + N - 1 \\ N \end{pmatrix}$$

であるからエントロピー S は[32]

$$
\begin{aligned}
S &= D_0 n\Big[(1+w)\ln(1+w) - w\ln w\Big] \\
&w = n^{-1} - \alpha
\end{aligned}
$$

よって自由エネルギーは

$$
\begin{aligned}
F &= E - TS - \mu N \\
&= D_0 T n(\beta(\epsilon-\mu) - (1+w)\ln(1+w) + w\ln w)
\end{aligned}
$$

これを使って $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ より[33] $w(\zeta)$ を

$$
w(\zeta)^\alpha (1+w(\zeta))^{1-\alpha} = \zeta
$$

$$
\begin{aligned}
w(\zeta) =& \zeta - 1, \quad (\alpha = 0) \\
w(\zeta) =& \quad \zeta, \quad (\alpha = 1)
\end{aligned}
$$

を満たす関数として

$$
n = \frac{1}{w(e^{\beta(\epsilon-\mu)}) + \alpha}
$$

となる。これはフェルミ分布とボーズ分布をつなぐ分布関数を与えることとなる。

より一般に種類の異なる粒子系が混在している場合に上記の議論を拡張し $i-$ 種粒子が $N_i, i = 1, 2, \cdots$ 存在する場合に $i-$ 種粒子が次に占有可能な状態数を D_i としたとき、

$$
D_i = D^0 - \alpha_{ij} \cdot N_j
$$

と書き、" 統計" を行列 $\boldsymbol{\alpha}$ に拡張することも可能であり、次に示すように、量子ホール効果における複合粒子系はこの拡張された統計に従うと考えられる。これを次に紹介しよう。

---

[32]

$$
\begin{aligned}
S &= \ln W \\
&= \ln \frac{(D_0 + (1-\alpha)N)!}{N!(D_0 - \alpha N)!} = (D_0 + (1-\alpha)N)\ln\,(D_0 + (1-\alpha)N) - N\ln N - (D_0 - \alpha N)\ln(D_0 - \alpha N) \\
s &= \frac{S}{D_0} = (1 + (1-\alpha)n)\ln(n^{-1} + (1-\alpha)) - n\ln 1 - (1-\alpha n)\ln(n^{-1} - \alpha), \quad n = \frac{N}{D_0} \\
&= n\Big((1+w)\ln(1+w) - w\ln w\Big) \\
&\quad w = n^{-1} - \alpha
\end{aligned}
$$

[33]

$$
\begin{aligned}
n\frac{\partial w}{\partial n} &= -\frac{1}{n} = -(w+\alpha) \\
\frac{1}{TD_0}\frac{\partial F}{\partial n} &= \beta(\epsilon-\mu) - (1+w)\ln(1+w) + w\ln w - n\frac{\partial w}{\partial n}\ln\frac{1+w}{w} \\
&= \beta(\epsilon-\mu) - (1+w)\ln(1+w) + w\ln w + (w+\alpha)\ln\frac{1+w}{w} \\
&= \beta(\epsilon-\mu) + (\alpha-1)\ln(1+w) - \alpha\ln w \\
&= \beta(\epsilon-\mu) - \ln(1+w)^{(1-\alpha)} w^\alpha = 0 \\
e^{\beta(\epsilon-\mu)} &= (1+w)^{(1-\alpha)} w^\alpha
\end{aligned}
$$

4.5 排他的分数統計と量子ホール効果

まず整数量子ホール効果を考え、ランダウ準位をしたから２個考えよう。

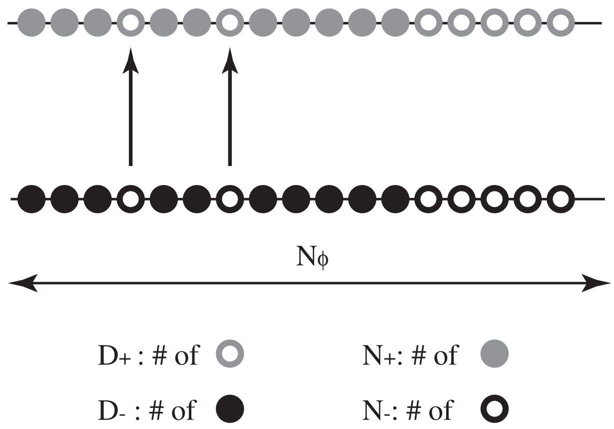

図 30: 量子ホール効果における準粒子、準正孔の排他的分数統計

この図のようにランダウ準位の縮退度が N_ϕ であるとき、電子が N_e 個あり図のような占有状況下を粒子 N_+ 個、正孔 N_- 個と記述する。この状況下でつぎに粒子を作るときその縮退度 D_+ 及び正孔を作るときその縮退度 D_- は

$$\begin{aligned} D_+(N_+,N_-) &= N_\phi - N_+ \\ D_-(N_+,N_-) &= N_\phi - N_- \\ N_\phi &= N_e + N_- - N_+ \end{aligned}$$

となる。これより拡張された（排他的）統計行列は

$$\begin{aligned} \alpha_{++} &= \alpha_{--} = 1 \\ \alpha_{+-} &= \alpha_{+-} = 0 \end{aligned}$$

となり、粒子、正孔はフェルミ統計に従うこととなる。

この議論を Jain の Composite フェルミオン描像に適用することを考えよう。まず、$\nu = 1/m$, m : odd 状態においては系の磁束を粒子にすべて張り付けるとボーズ的になり、粒子あたり、$m-1$ 本ずつ張り付けると残りの磁束と粒子の数が等しく、整数量子ホール効果として理解できたことを振り返ろう。よって電子数が少しだけ上記のマジック数からずれた状況においては

$$N_\phi = (m-1)N_e + N_\phi^{eff} \quad (*)$$

として与えられる N_ϕ^{eff} が実効的な系の磁束と考えられよう。ここで前述の整数量子ホール効果での議論をそのまま使って $N_f = N_e$ を Composite フェルミオンの数とすれば

$$N_\phi^{eff} = N_f + N_- - N_+$$

$$\begin{aligned} D_+^{eff}(N_+,N_-) &= N_\phi^{eff} - N_+ \\ D_-^{eff}(N_+,N_-) &= N_\phi^{eff} - N_- \\ N_\phi^{eff} &= N_f + N_- - N_+ \end{aligned}$$

となる。ここでの最後の式と (*) から表面にでない電子の数を消去すれば

$$N_\phi^{eff} = \frac{1}{m}N_\phi - (1-\frac{1}{m})N_+ - (\frac{1}{m}-1)N_-$$

よって

$$\begin{aligned} D_+^{eff}(N_+,N_-) &= \frac{1}{m}N_\phi - (2-\frac{1}{m})N_+ - (\frac{1}{m}-1)N_- \\ D_-^{eff}(N_+,N_-) &= \frac{1}{m}N_\phi - (1-\frac{1}{m})N_+ - \frac{1}{m}N_- \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{aligned} \Delta D_+^{eff}(N_+,N_-) &= -(2-\frac{1}{m})\Delta N_+ - (\frac{1}{m}-1)\Delta N_- \\ \Delta D_-^{eff}(N_+,N_-) &= -(1-\frac{1}{m})\Delta N_+ - \frac{1}{m}\Delta N_- \end{aligned}$$

これは分数量子ホール効果における準粒子、準正孔は拡張された分数統計

$$\begin{pmatrix} \alpha_{++} & \alpha_{+-} \\ \alpha_{-+} & \alpha_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 \\ 1-\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

に従うことを意味する。