– 量子ホール効果 –

その意義と幾何学的および代数的構造

東京大学大学院工学系研究科　物理工学　初貝 安弘[1]

目 次

[1]hatsugai@pothos.t.u-tokyo.ac.jp,　http://pothos.t.u-tokyo.ac.jp/summer_school/　v1.05 最終変更 2001. 8.01

量子ホール効果に関してはその現象の発見に対して Klitzing(1982 年) にノーベル賞が与えられ [1]、この現象において存在すると考えられている分数電荷の発見に対して Tsui, Störmer, Laughlin (1998 年) に再びノーベル賞が与えられています。賞による評価がすべてというわけでは当然ありませんが、この現象の現在の物性物理における意義の大きさをある程度、象徴しているといえるでしょう。量子ホール効果は磁場中の２次元電子系でおきる現象です。この系においては後で述べます幾何学的位相とよばれる量子力学的な位相が本質的な役割を果たします。また、分数量子ホール効果は運動エネルギーに比べて電子間の相互作用エネルギーが極めて大きいいわゆる強相関の問題の典型例です。振り返ると量子ホール効果は現在の物性物理の重要な問題である「幾何学的位相」と「強相関効果」の主な舞台であり、事実ここで得られた手法は他の問題へ適用され新しい知見を産みつつあるわけです。

この現象を中心としてその固体物理における重要性が理解できるような講義をしたいと思います。また量子ホール効果の舞台となる磁場中の２次元電子系は講義で議論するように現代的な幾何学的、数学的構造、代数的構造を含んでおりその面からも極めて興味深い対象となっています。この数学的な構造についても理解して頂ける講義としたいと思います。電子系の基本的かつ 普遍的現象としての 量子ホール効果に関連して、しっかりわかってきたこと 及びその研究の過程で生まれてきたアイデア をできるだけ自己完結する見方でお話したいとおもいます。特に量子ホール効果については「通常の固体物理的側面」からの解説はすでに多く存在するのできるだけ特徴あるものとなればと考えています。

なお本文中脚注番号がついている部分については導出その他の部分で講義では説明する予定です。自分で埋めてみてください。また参考文献は最低限のものを多少の参考となることを期待してのせています。原論文で引用しているようにここでの議論は多くの人々の結果によるところが多大であることはいうまでもありません。ここで関係の方々に感謝したいとおもいます。ただし時間の関係で参考文献リストは最小限かつランダムなものとなっていることを了解していただきたいとおもいます。

1 講義の概要 (予定)

1. 整数量子ホール効果とは

   - 磁場中の電子系についての基礎的な事柄
   - 幾何学的位相としての Berry Phase
   - Laughlin のゲージ不変性の議論

     量子ホール効果についての極めて明解かつ本質的な議論を紹介します。

     物理現象においては境界は副次的な重要性しか持たないと思いがちですが近年の物理においてはそこに本質的重要性がある場合が多々あります。量子ホール効果においては境界 (エッジ) の存在が重要です。
   - 境界を持たない系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味 (TKNN)

     無限大の系、もしくは周期的境界条件を課した系におけるホール伝導度は Chern 数と呼ばれる符号つきの整数で表せる渦度の総和として記述できることを示します。
   - 境界のある系におけるホール伝導度のトポロジカルな意味

     一方向に境界を持つ系 (シリンダー) 状の系におけるホール伝導度は複素エネルギー面としてのリーマン面上でのある種の回転数もしくは閉曲線の交点数として記述できることを示します。
   - ２つの幾何学的量の間の関係、バルクかエッジか

     上記の２つの幾何学的な整数の間の関係を議論します。その結果２つの記述が同値であることを示します。

2. 分数量子ホール効果とその周辺

   - ホール伝導度の分数量子化と分数電荷、分数統計 (Anyon)、排他的分数統計

     ホール伝導度の分数量子化は分数電荷の存在と基底状態の縮退を意味します。さらにこの系で議論される２種類の分数統計である Anyon と排他的分数統計についても議論したいと思います。
   - Composite Fermion (Jain) と 磁束の切り貼り、Adiabatic Heuristic Argument (Wilczek)

     分数量子ホール効果においては Jain が最初に提案した電子と磁束の複合粒子 (Composite Fermion) が基本粒子と考えられます。これを概念的に断熱的接続の考え方に基づいて拡張したものが Wilczek 等が提案した Adiabatic Heuristic です。これらについて フェルミ液体と考えられる 1/偶数 状態等をふくめて議論します。

3. 量子相転移との関連

   - 量子相転移としての量子ホール状態間の転移と選択則、Dirac Fermion

     ホール伝導度が変化する転移は、基底状態の相転移である量子相転移の典型例と考えられます。これに関してその選択則、ならびに転移を支配する質量を持つ Dirac Fermion の関連を議論します。
   - 時間反転対称性をやぶる超伝導体への応用と量子相転移、Duality

     量子ホール効果において初めて議論された上記のトポロジカルな性質は実は他の物理現象においてもほぼ並行に議論できるものがいくつもあることが最近分かってきました。

その最も初期かつ重要な例として時間反転対称性を破る超伝導体における応用について議論します。

- ランダム系との関連、ホール絶縁体

  時間があればトポロジカルな議論がランダム系における諸問題をいかに拘束し、また有用な情報を与えるかを議論します。

4. 磁場下の粒子の量子力学と代数的構造

- 磁場下での並進操作の非可換性と量子群

  量子力学においては波動関数の位相の重要性が、Berry により幾何学的位相として指摘され、その後の種々の問題においてその概念の有効性が示されてきています。特に、磁場の存在下では荷電粒子を量子力学的に移動させる際に得る幾何学的位相は、アハロノフ・ボーム効果として知られ、移動の始点と終点だけでなくその履歴に依存することになり、その直接の帰結として並進操作に非可換性をもたらします。Wiegmann-Zabrodin はこの非可換性と数学的にも新しい非可換性を持つ概念である量子群とのあいだに具体的な関連があることを発見しそこに可解模型と同様の構造の存在することを指摘しました。この関連を説明し、その後のいくつかの展開を紹介したいと思います。

- (マルチ) フラクタル、自己相似性に関する解析的な議論

  磁場中の問題とフラクタル構造の関係としては有名な Hofstadter のバタフライの図等がありますが、上記の議論の面白い直接の帰結として例えば複素平面上でその根がマルチフラクタルに分布する方程式、等が得られます。