— 量子力学第 3 問題: (相対論的量子力学) —

1 自由空間でのディラック方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = H_D\psi(\vec{r},t)$$
$$H_D = c\vec{\alpha}\cdot\vec{\hat{p}} + \beta mc^2, \vec{\hat{p}} = \hbar\frac{\vec{\nabla}}{i}$$

を考えよう。

i 特定の表示 $\vec{\alpha} = \rho_1 \otimes \vec{\sigma}$, $\beta = \rho_3 \otimes I_2$ をとり

$$\psi(\vec{r},t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar - Et/\hbar)}u$$

としたとき u の満たす方程式が次のようになることを示せ。

$$H(\vec{p})u = Eu$$
$$H(\vec{p}) = c\rho_1 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + \rho_3 \otimes I_2 mc^2$$

ここで 記号 $\otimes$ は 2×2 行列 の組から 4×4 行列を次のように構成する際に用いる（テンソル積)

$$(A\otimes B)_{ia,jb} \equiv A_{ij}B_{ab}$$
$$i,j = 1,2 \quad a,b = 1,2$$
$$(i,a),(j,b) = (1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$$

よってブロック行列の掛算を思い出せば次のようになる。

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC\otimes BD)$$

これは次の式から理解することもできる。

$$\begin{aligned}\{(A\otimes B)(C\otimes D)\}_{ia,jb} =& (A\otimes B)_{ia,kc}(C\otimes D)_{kc,jb}\\ =& A_{ik}B_{ac}C_{kj}D_{cb} = (AC)_{ij}(BD)_{ab}\\ =& (AC\otimes BD)_{ia,jb}\end{aligned}$$

また[1]

$$\mathrm{Tr}\,A\otimes B = \mathrm{Tr}\,A\,\mathrm{Tr}\,B$$

ii 次の関係式を示せ。

$$(\vec{\sigma}\cdot A)(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B}$$

iii 次の関係式を示せ。[2]

$$\begin{aligned} H(\vec{p})^2 &= I_4\, c^2(p^2+m^2c^2) \\ E &= \pm\, c\sqrt{p^2+m^2c^2} = \pm E(\vec{p}) \end{aligned}$$

iv ヘリシティー $h \equiv \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p} = \frac{1}{p} I_2 \otimes \vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ として次の式を示せ. [3]

$$\begin{aligned} [h, H(\vec{p})] &= 0 \\ h^2 &= 1 \end{aligned}$$

v $\vec{p} = (0,0,p)$ の時、$H(\vec{p})$ と h の同時固有状態をもとめよ。

i. このとき h の固有状態 $u_\pm$, $hu_\pm = \pm u_\pm$ が次のようにかけることを示せ。

$$u_+ = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix},\ (a, b\ \text{任意})$$

$$h = (I_2\otimes\sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. $u_\pm$ を $H(\vec{p})$ のエネルギー $E = \pm E(\vec{p})$ の固有状態となるように a, b を決定せよ。[4]

$$H(\vec{p}) = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -cp \\ cp & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -cp & 0 & -mc^2 \end{pmatrix}$$

iii. $E = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$ については $cp << mc^2$ のときつぎの関係式を示せ。

$$|u_3|^2 + |u_4|^2 << |u_1|^2 + |u_2|^2$$

Notes

1

$$\operatorname{Tr} A \otimes B = \sum_{ia} (A \otimes B)_{ia,ia} = \sum_{ia} A_{ii} B_{aa} = \operatorname{Tr} A \operatorname{Tr} B$$

2

$$\begin{aligned} H(\vec{p})^2 =& (c\rho_1 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + \rho_3 \otimes I_2 mc^2)^2 \\ =& c^2 \rho_1^2 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 + (\rho_1\rho_3 + \rho_3\rho_1) \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) mc^3 + \rho_3^2 \otimes I_2 m^2 c^4 \\ =& c^2 I_2 \otimes I_2 p^2 + I_2 \otimes I_2 m^2 c^4 = I_4 c^2 (p^2 + m^2 c^2) \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} [H(\vec{p}), I_2 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})] =& [c\rho_1 \otimes (\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) + mc^2 \rho_3 \otimes I_2, I_2 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})] \\ =& [c\rho_1 \otimes (\vec{p}\cdot\vec{\sigma}), I_2 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})] + [mc^2 \rho_3 \otimes I_2, I_2 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})] = 0 \\ [A \otimes I, B \otimes C] =& AB \otimes C - BA \otimes C = [A, B] \otimes C \end{aligned}$$

4 まず u_+ について

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -cp \\ cp & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -cp & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} u_+ = \begin{pmatrix} mc^2 a + cpb \\ 0 \\ cpa - mc^2 b \\ 0 \end{pmatrix} = \pm E(\vec{p}) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 \mp E(\vec{p}) & cp \\ cp & -mc^2 \mp E(\vec{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} mc^2 \pm E \\ cp \end{pmatrix}, \quad 1 = |a|^2 + |b|^2 = C^2 2(c^2p^2 + m^2c^4 \pm mc^2 E) = 2C^2 E(E \pm mc^2)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E(E \pm mc^2)}} \begin{pmatrix} mc^2 \pm E \\ cp \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E(E \pm mc^2)}} \begin{pmatrix} \pm(E \pm mc^2) \\ cp \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} \pm(E \pm mc^2) \\ cp(E \pm mc^2)^{-} \end{pmatrix}$$

$$\text{for } E = +E(\vec{p}), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} +(E + mc^2)^{1/2} \\ cp(E + mc^2)^{-1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{cp}{E + mc^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{for } E = -E(\vec{p}), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} -(E - mc^2)^{1/2} \\ cp(E - mc^2)^{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} -(E^2 - m^2c^4)^{1/2}(E + mc^2)^{-1/2}) \\ cp(E - mc^2)^{-1/2}(E + mc^2)^{+1/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{pmatrix} -cp(E + mc^2)^{-1/2}) \\ (E + mc^2)^{+1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{cp}{E + mc^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

つぎに u_- について

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -cp \\ cp & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -cp & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ mc^2 a - cpb \\ 0 \\ -cpa - mc^2 b \end{pmatrix} = \pm E(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 \mp E(\vec{p}) & -cp \\ -cp & -mc^2 \mp E(\vec{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

これは u_+ で $p \to -p$ とすれば得られるから

$$\text{for } E = +E(\vec{p}), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{cp}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{for } E = -E(\vec{p}), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{cp}{E+mc^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$