— 量子力学第 3 問題: (光と物質の相互作用) —

1 電磁場中の荷電粒子はローレンツ力に従うが、これを正準方程式から導くハミルトニアンを考えよう。

i 正準変数の組 $\vec{r}$, $\vec{p}$ とハミルトアンが与えられたとき正準方程式を書き下せ。

ii 次のハミルトニアンに対する正準方程式を書き下せ。

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A}(\vec{r}))^2 + e\phi(\vec{r})$$

iii 上記の方程式からローレンツ力に従うニュートンの運動方程式を導け。

2 ハミルトニアンを $H = H_0 + H_i$ としたとき全系の波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ から相互作用表示の波動関数を次のように作ったとき、

i $|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle$ の満たす方程式を導け。

$$|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar}|\Psi(t)\rangle$$

ii H_0 の固有状態を $|n\rangle$ として

$$|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

に対してつぎの確率の保存を導け。

$$\frac{d}{dt}\sum_n |c_n(t)|^2 = 0$$

iii 一般のエルミート演算子 F にたいして

$$\langle\Psi(t)|F|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi^{\mathrm{I}}(t)|F^{\mathrm{I}}(t)|\Psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle$$

となる $F^{\mathrm{I}}(t)$ を求めよ。

3 正準変数 $(q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}\sigma})$ のボーズ粒子表示

$$q_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}), \qquad p_{\vec{k}\sigma} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma})$$

を考える。

i $q_{\vec{k}\sigma}$, $p_{\vec{k}'\sigma'}$ の交換関係を導け。

ii つぎの輻射場のハミルトニアンを生成消滅演算子で書け。

$$H_{rad} = +\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\left(p_{\vec{k}\sigma}p_{-\vec{k}\sigma} + c^2k^2 q_{\vec{k}\sigma}q_{-\vec{k}\sigma}\right)$$

iii 次の輻射場の運動量を生成消滅演算子で書け。

$$G_{em} \quad = \quad -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\, p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}$$

4 3 次元の任意のベクトル $\vec{v}$ を規格直交化された基底ベクトル $\vec{e}_\sigma$, $\sigma = 0,1,2$ で展開する。

$$\vec{v} = c_\sigma \vec{e}_\sigma$$

i

$$c_\sigma = (\vec{v}\cdot\vec{e}_\sigma)$$

を示せ。

ii この展開の α 成分を書き出し次の関係式を導け.

$$v_\alpha \quad = \quad v_\beta(\vec{e}_\sigma)_\beta(\vec{e}_\sigma)_\alpha$$

iii 次の完全性の関係式を導け.

$$(\vec{e}_\sigma)_\beta(\vec{e}_\sigma)_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$$

Notes