— 量子力学第３:試験問題 — 2003 2.6 (9:00—12:00) 初貝

I. 1次元ポテンシャル $V(x)$ 中の質量 m の粒子の散乱問題を定常状態の量子力学により議論しよう。

I.1 波動数関 $\psi(x)$ が従う方程式と $\psi^*(x)$ が従う方程式を書き出し次のロンスキー行列式 $W(x)$ が x に依存しないことを示せ。(ヒント $W(x)'$ を計算せよ。)

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi' & \psi^{*\prime} \end{pmatrix} = \psi\psi^{*\prime} - \psi^*\psi'$$

I.2 散乱体が有限の領域にのみあるとし、$x \sim -\infty$ での波動関数を $\psi_{\rm in}(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$, $x \sim +\infty$ での波動関数を $\psi_{\rm out}(x) = Te^{ikx}$ としたとき $(k > 0)$, $W(-\infty) = W(\infty)$ から確率の保存 $|T|^2 + |R|^2 = 1$ を示せ。

I.3 $V(x) = g\delta(x), g > 0$ として R, T を求め確率の保存を確認せよ。

II. フェルミ粒子の場の演算子は $\psi(\vec{r}) = \sum_j \phi_j(\vec{r})c_j$ と規格直交化された完全系 $\{\phi_j(\vec{r})\}$ および対応するフェルミ粒子の消滅演算子 c_j で展開されるとして以下の問いに答えよ。($\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}$, $\{c_j, c_k\} = 0$, $\{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0$)

II.1 $\phi_j(\vec{r})$ が規格直交化された完全系をなすとはなにか?説明せよ。

II.2 反交換関係 $\{\psi(\vec{r}), \psi^\dagger(\vec{r}')\}$ を求めよ。

II.3 $\phi_j(\vec{r})$ を自由空間中のハミルトニアン $h = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ の固有状態としよう。

II.3.1 系が1辺 L の立方体のなかにあるとして周期的境界条件を要求し $\phi_{\vec{k}}$ を求めよ。(固有関数のラベル j は波数 $\vec{k}$ となることに注意し許される k の値についても述べよ。)

II.3.2 (3.1) で与えた完全系を用いた場の演算子の表示を用い次の演算子を $c_{\vec{k}}$ で表せ。

$$H = \int d^3r\, \psi^\dagger(\vec{r})h(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

II.3.3 真空 $|0\rangle$ を $\forall\vec{k},\ c_{\vec{k}}|0\rangle = 0$ を満たす状態として、3 粒子状態 $|3\rangle = c^\dagger_{\vec{k}_a}c^\dagger_{\vec{k}_b}c^\dagger_{\vec{k}_c}|0\rangle$, $\vec{k}_a \neq \vec{k}_b, \vec{k}_a \neq \vec{k}_c, \vec{k}_b \neq \vec{k}_c$ に対して次の量を計算せよ。

$$\langle 3|H|3\rangle$$

III. 相互作用の無い電子系での電子配置をまず考えクーロン斥力の効果を摂動論で考えよう。

III.1 クーロン力が存在しないときの電子配置 $(1s)^1(2s)^1$ の縮退度はいくつか

III.2 一般の多重項 ${}^{2S+1}L$ の縮退度はいくつか。$(L = S, P, D, \cdots)$

III.3 電子配置 $(1s)^1(2s)^1$ からクーロン斥力により生ずる多重項をもとめよ。

III.4 多重項 ${}^{2S+1}L$ の縮退がとける原因としてはどのようなものが考えられるか述べよ。

IV. 電子のスピンの起源について考えよう。

IV.1 電子の従うディラック方程式が次のように与えられるとして χ を消去し ψ だけの方程式を導け。ただし $\vec{\sigma}$ をパウリ行列として $P = \vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - e\vec{A})$ である。

$$\begin{aligned} mc^2\psi + cP\chi =& E\psi \\ cP\psi - mc^2\chi =& E\chi \end{aligned}$$

IV.2 $E \sim mc^2$ として $W = E - mc^2$、$E + mc^2 \to 2mc^2$ と近似し上の方程式を W を固有値とする固有方程式の形に書き直せ。

IV.3 $P^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}$ であることを用い、シュレディンガー方程式を

$$H\psi = W\psi, \qquad H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A}) + \vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

と書いたときの電子の磁気モーメント $\vec{\mu}$ をもとめよ。$(\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A})$

V 正準変数のボーズ粒子表示

$$q_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}), \qquad p_{\vec{k}\sigma} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma})$$

を用い以下の問に答えよ。($[a_{k\sigma}, a^\dagger_{k'\sigma'}] = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$, $[a_{k\sigma}, a_{k'\sigma'}] = 0$)

V.1 $q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}'\sigma'}$ の交換関係を導け。

V.2 次の輻射場のハミルトニアンを生成消滅演算子で書け。

$$H = +\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\left(p_{\vec{k}\sigma}p_{-\vec{k}\sigma} + \omega_k^2 q_{\vec{k}\sigma}q_{-\vec{k}\sigma}\right)$$

V.3 光子が 3 個存在する状態 $|3\rangle = (a^\dagger_{\vec{k},\sigma})^3|0\rangle$ についてエネルギー期待値 $\frac{\langle 3|H|3\rangle}{\langle 3|3\rangle}$ を計算せよ。($|0\rangle$ は $\forall k, \sigma$ に対して $a_{\vec{k}\sigma}|0\rangle = 0$)