— 量子力学第 3 試験問題 — 2002.2.7(13:00-16:00)

I. 3次元の球対称ポテンシャル $V(r)$ 中での散乱問題を議論しよう。系の波動関数を $\Psi(\vec{r}) = Y_{\ell m}(\theta,\varphi)R_\ell(r)$ と変数分離したとき、$R(r)$ の満たす方程式は

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + U(r)\right)R(r) = k^2 R(r)$$

となる。ここで $V(r) = \frac{\hbar^2}{2m}U = V$, 固有エネルギー $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ である。

I.1 $\bar{R}(r) = rR(r)$ としたとき $\bar{R}$ の満たすべき方程式を求めよ。

I.2 以下、次のポテンシャルに関して s 波 $(\ell = 0)$ の散乱を議論しよう。

$$U(r) = \begin{cases} U_0, & |r| < a \\ 0, & |r| > a \end{cases}$$

$R(0) =$ 有限 として、$r < a$ の波動関数を求めよ（ただし $K^2 = k^2 - U_0$ とせよ。

I.3 $E > 0$ のとき、$r > a$ での波動関数を次のように書き、散乱行列 S_0 を求めよ。

$$R(r) = C\frac{1}{r}\left(S_0 e^{ikr} - e^{-ikr}\right)$$

I.4 $S_\ell = e^{i2\delta_\ell}$ と書いたときの δ_ℓ を位相のずれと呼ぶが、$U_0 \to \infty$ (剛体球) のとき δ_0 を求めよ。

I.5 $E < 0$ の場合 $k = i\kappa$ として散乱行列、束縛状態について議論せよ。

II. スピン軌道関数 $\bar{\phi}_{j\mu}(\vec{r},\sigma) = \phi_j(\vec{r})\chi_\mu(\sigma)$ $(j = 1, 2, \cdots, \mu = \uparrow, \downarrow, \sigma = 1, 2)$ は次の関係式を満たすとき完全系をつくるという。

$$\sum_j \phi_j(\vec{r})\phi_j^*(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), \quad \sum_{\mu=\uparrow,\downarrow} \chi_\mu(\sigma)\chi_\mu^*(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}$$

II.1 $\{\phi_j(\vec{r})\}$ が規格直交化されているとは何か？また $\{\boldsymbol{\chi}_\mu\}$ が規格直交化されているとは何か？

II.2 $\boldsymbol{\chi}_\mu$ $(\mu = \uparrow, \downarrow)$ をそれぞれ $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 ± 1 の規格化された固有状態ととったときこれらが完全系をつくることを示せ。

II.3 スピン軌道関数に対応するフェルミ粒子の生成、消滅演算子を $c_{j\mu}^\dagger$, $c_{j\mu}$ としたとき ($\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ 等) 場の演算子を次のように定義する。

$$\psi_\sigma(\vec{r}) = \sum_{j\mu} \phi_j(\vec{r})\chi_\mu(\sigma)c_{j\mu}$$

$\{\phi_j(\vec{r})\}$ が一粒子ハミルトニアン $h(\vec{r})$ の固有値 ϵ_j の規格直交化された完全系であるとき次の関係式を示せ。

$$\sum_\sigma \int d\vec{r}\, \psi_\sigma^\dagger(\vec{r})h(r)\psi_\sigma(\vec{r}) = \sum_{j\mu} \epsilon_j\, n_{j\mu}, \quad n_{j\mu} = c_{j\mu}^\dagger c_{j\mu}$$

II.4 $|\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^\dagger_{\sigma_1}(\vec{r}_1)\psi^\dagger_{\sigma_2}(\vec{r}_2)|0\rangle$ としたとき、２粒子状態 $|\Psi\rangle = c^\dagger_{1s\uparrow}c^\dagger_{2s\uparrow}|0\rangle$ に対して $\Psi(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2) = \langle\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2|\Psi\rangle$ を計算せよ。

II.5 今度は２粒子状態 $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1s\uparrow}c^\dagger_{2s\downarrow} - c^\dagger_{1s\downarrow}c^\dagger_{2s\uparrow})|0\rangle$ に対して $\Phi(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2) = \langle\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2|\Phi\rangle$ を計算せよ。

II.6 [II-5] の状態を例として、フェルミ粒子の波動関数の置換に対する対称性、パウリの排他律、フントの規則について知るところを述べよ。

III. 電場 $\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\phi$ ならびに磁場 $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu_0\vec{H}$ をクーロンゲージ $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ のもとで量子化することを考えよう。

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
\phi(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{k}}\phi_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}
\end{aligned}
$$

ここで $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$, $\vec{e}_{\vec{k}\sigma} = \vec{e}_{-\vec{k}\sigma}$, $\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\vec{e}_{\vec{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$, $\vec{e}_{\vec{k}0} = \hat{k}$ である。

III.1 $\vec{E}, \vec{B}$ をフーリエ展開せよ。

III.2

$$
\begin{aligned}
[a_{\vec{k}\sigma}, a^\dagger_{\vec{k}'\sigma'}] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad [a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}] = 0, \quad [a^\dagger_{\vec{k}\sigma}, a^\dagger_{\vec{k}'\sigma'}] = 0 \\
q_{\vec{k}\sigma} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}), \quad p_{\vec{k}\sigma} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma})
\end{aligned}
$$

として次の関係式を示せ。なお $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ である。

$$
[q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}'\sigma'}] = i\hbar\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}
$$

III.3 $\dot{q}_{\vec{k}\sigma} = p_{-\vec{k}\sigma}$ として物質場のない場合（ $\phi = 0$ ）を以下考える。

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{1}{c^2}\int dV\vec{P} = \frac{1}{c^2}\int dV\vec{E}\times\vec{H} \\
&= -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\,p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}
\end{aligned}
$$

を示せ。($\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\times(\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k}\sigma}) = \vec{k}$ に注意せよ。)

III.4

$$
G = \sum_{\vec{k}\sigma}\hbar\vec{k}\,n_{\vec{k}\sigma}, \quad n_{\vec{k}\sigma} = c^\dagger_{\vec{k}\sigma}c_{\vec{k}\sigma}
$$

を示せ。