— 量子力学第 3 補足 (初貝)

物質の存在する場合の運動量に関して補足する。

<u>場の運動量</u>

電磁場の運動量 G_{em} はポインティングベクトルから次のように計算される。

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{c^2}\int dV \vec{P} = \frac{1}{c^2}\int dV \vec{E}\times\vec{H} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV(\dot{\vec{A}}+\vec{\nabla}\phi)\times \mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= G^0_{em}+G'_{em} \\
G^0_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\dot{\vec{A}}\times \mathrm{rot}\,\vec{A} \\
G'_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\vec{\nabla}\phi\times \mathrm{rot}\,\vec{A}
\end{aligned}$$

まず、純輻射場の運動量 G^0_{em} は正準変数で次のように書ける。

$$G^0_{em} = -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\,p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}$$

さらに粒子の存在からくる項を次のように変形しよう (部分積分ならびに周期的境界条件から境界項がきえることとクローンゲージの条件に注意)

$$\begin{aligned}
G'_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\vec{\nabla}\times(\phi\,\mathrm{rot}\,\vec{A})-\phi\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\phi\,\Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,(\Delta\phi)\,\vec{A} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\int dV\,\rho\vec{A} = \sum_j z_j e\vec{A}_j
\end{aligned}$$

よって全運動量 G_T を粒子系の運動量と輻射場の運動量の和として

$$\begin{aligned}
G_T &= \sum_j m_j\dot{\vec{r}}_j + G_{em} \\
&= \sum_j \vec{P}_j + G^0_{em}
\end{aligned}$$

となる。$(\vec{P}_j = m_j\dot{\vec{r}}_j + z_j e\vec{A}(\vec{r}_j))$