— 量子力学第3:試験問題 — 2000 2.10 (13:00—16:00) 初貝

I. ポテンシャルが原点近傍半径 a の範囲でのみ有限となるとき散乱の積分方程式が次のように与えられることを認め以下の問に答えよ。(入射波は $+z$ 方向であるとする。)

$$\Psi^{+}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ikz} - \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\frac{1}{4\pi}\int_{r<a} d\vec{r}' \frac{e^{ik|r-r'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\Psi^{+}(\vec{r}')$$

I.1 ボルン近似による波動関数を書き下せ。

I.2 散乱振幅 $f(\theta)$ はボルン近似で

$$f_B(\theta_{\vec{k}}) = -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}V(r), \quad \vec{k}' = k\hat{z}$$

となるが、$\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}'$ として $\vec{K}$ 方向の極座標で角度積分を実行せよ。

I.3 以下のポテンシャル の場合に散乱振幅 $f(\theta)$ をボルン近似で求めよ。

$$V(r) = A\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

II. フェルミ粒子の場の演算子を $\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_j \phi_j(\vec{r})c_j$ と規格直交化された完全系 $\{\phi_j(\vec{r})\}$ および対応するフェルミ粒子の消滅演算子 c_j で展開する。($\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}$, $\{c_j, c_k\} = 0$, $\{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0$)

II.1 反交換関係 $\{\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')\}$ を求めよ。

II.2 一辺 L の3次元の箱のなかにある自由粒子 (ハミルトニアン $h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$) を考え周期的境界条件を課して全ての固有状態 $\phi_j(\vec{r})$ と 固有エネルギー ϵ_j を求めよ。特にこの場合の固有状態のラベル j が何かを説明せよ。以下の問ではこの規格直交系とフェルミ粒子の生成消滅演算子を用いよ。

II.3 第二量子化したハミルトニアン

$$H_0 = -\int dV \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\psi}(\vec{r})$$

をフェルミ粒子の生成消滅演算子を用いて書け。

II.4 N 粒子状態 $|N\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger \cdots c_N^\dagger|0\rangle$ ($|0\rangle$ は真空) に対して次の期待値を計算せよ。

$$\langle N|\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})|N\rangle$$

II.5　２粒子状態 $|2\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger|0\rangle$ に関して相互作用

$$H_i = \frac{1}{2}\int d^3r\ d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,')\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r})$$

の期待値を計算せよ。ただし

$$J(k,j) = e^2\int d^3r\ d^3r'\frac{|\varphi_k(\vec{r}\,')|^2|\varphi_j(\vec{r})|^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\ \ K(k,j) = e^2\int d^3r\ d^3r'\frac{\varphi_k^*(\vec{r}\,')\varphi_j(\vec{r}\,')\varphi_j^*(\vec{r})\varphi_k(\vec{r})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

とする。

III.　相互作用の無い電子系での電子配置をまず考えクーロン相互作用の効果を摂動論で考えよう。

III.1　電子配置 $(2p)^2$ の縮退度はいくつか

III.2　電子配置 $(2p)^2$ から生じる多重項を ${}^{2S+1}L$ の形でその縮退度とともに示せ。

III.3　$\langle {}^{2S+1}L|\vec{L}^2|{}^{2S+1}L\rangle$ と $\langle {}^{2S+1}L|\vec{S}^2|{}^{2S+1}L\rangle$ をもとめよ。

III.4　フントの規則とは何かその物理的理由とともに述べよ。

III.5　スピン軌道相互作用 $A\vec{S}\cdot\vec{L}$ により多重項 ${}^{2S+1}L$ のエネルギー準位ははどのように分裂するか議論せよ。

IV.　ローレンツ力について考えよう。

IV.1　正準変数の組 $\vec{r}$, $\vec{p}$ とハミルトアンが与えられたとき正準方程式を書き下せ。(ヒント：自由粒子の場合を考えてみよ。)

IV.2　次のハミルトニアンに対する正準方程式を書き下せ。

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A}(\vec{r}))^2 + e\phi(\vec{r})$$

IV.3　[IV.2] からローレンツ力に従う粒子のニュートンの運動方程式を導け。ただしベクトルポテンシャルが直接時間に依存することにも注意せよ。

IV.4　量子力学におけるハミルトニアンを微分演算子による表現として書け。

V 正準変数のボーズ粒子表示

$$q_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}),\qquad p_{\vec{k}\sigma} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma})$$

を用い以下の問に答えよ。

V.1 $q_{\vec{k}\sigma}$, $p_{\vec{k}'\sigma'}$ の交換関係を導け。

V.2 次の輻射場のハミルトニアンを生成消滅演算子で書け。

$$H_{rad} = +\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\left(p_{\vec{k}\sigma}p_{-\vec{k}\sigma} + c^2k^2 q_{\vec{k}\sigma}q_{-\vec{k}\sigma}\right)$$

V.3 通常の原子が関与する光学過程において光の波数としては $k = 0$ として良い理由を述べよ。ただし微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ である。