演習問題 8:ブラウン運動

問題 1. 関数 $y = y(x)$ に関する一般の 1 階の線形微分方程式に関して復習する。

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

ただし、$p(x), q(x)$ は与えられた関数である。

(a) $q = 0$ の場合の斉次方程式の一般解は、c を任意定数として $\bar{y}(x) = ce^{-\int^x dx'\, p(x')}$ であることを示せ。

(b) 非斉次方程式の一般解は任意定数を含まない解 (特解) $y_s(x)$ が知られているとき、$y(x) = y_s(x) + \bar{y}(x)$ であることを示せ。

(c) 特解の求め方 1 (定数変化法)

i. $y_s(x) = C(x)\bar{y}(x)$ が特解となるために関数 $C(x)$ が満たす方程式を導け。

ii. $C(x)$ をもとめ特解 $y_s(x)$ が次のように書けることを示せ。

$$y_s(x) = \int_{-\infty}^{x} dx' \frac{q(x')\bar{y}(x)}{\bar{y}(x')}$$

(d) 特解の求め方 2 (グリーン関数による方法)

次の微分方程式を満たす関数を 1 階微分方程式のグリーン関数という。

$$\frac{d}{dx}G(x,x') + p(x)G(x,x') = \delta(x - x')$$

i. $y_s(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x,x')q(x')$ が特解であることを示せ。

ii. グリーン関数が満たす微分方程式を x に関して $[x' - 0, x' + 0]$ で積分して次の関係式を導け。

$$G(x' + 0, x') - G(x' - 0, x') = 1$$

iii. グリーン関数 $G(x,x')$ を x の関数と見た時、$x \neq x'$ で斉次方程式を満たす。λ を定数として

$$G(x,x') = \begin{cases} c\bar{y}(x) & x > x' \\ 0 & x < x' \end{cases}$$

が斉次解であることを示し、さらに不連続性の条件から定数 λ を求めよ。

問題 2. 1 次元の質量 m の質点のブラウン運動をランダム力 $F_R(t)$ と速度に比例する抵抗力 $-\gamma v$ の下でのランジュバン方程式で議論する。なお時刻 t における質点の座標を $x(t)$, 速度を $v(t) = \dot{x}(t)$ とする。

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= -\gamma v + F_R(t) \\
\langle F_R(t) \rangle &= 0, \qquad \langle F_R(t) F_R(t') \rangle = 2M\delta(t - t'),
\end{aligned}
$$

(a) ランダム力が存在しない場合の質点の速度 $v = \bar{v}(t)$ を求め、その物理的意味を説明せよ。(斉次解)

(b) ランダム力がある場合の解を定数変化法で求めよ。ただし初期条件は $v(0) = v_0$ とせよ。

(c) $\langle F_R(t) v_0 \rangle = 0,\, t > 0$ となる物理的な理由を述べよ。

(d) 十分に時間が経過したとき $\langle [v(t)]^2 \rangle = \dfrac{M}{m\gamma}$ となることを示せ。

(e) エネルギー等分配則 $\dfrac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \dfrac{1}{2} k_B T$ を用いて $M = \gamma k_B T$ となることを示せ。

(f) M がランダム力の大きさを表現していることに注意して前問の結果の物理的意味を説明せよ。

(g) $v(t)$ を積分すれば次式が得られる。

$$
\delta x \equiv x(t) - x(0) = \int_0^t d\tau v_0 e^{-\kappa\tau} + \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds\, F_R(s) e^{-\kappa(\tau - s)}
$$

積分の順序を変更し次式を導け。ただし $\kappa = \gamma/m$ である。

$$
\delta x(t) = v_0 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{1}{m\kappa} \int_0^t F_R(s)(1 - e^{-\kappa(t - s)})
$$

(h) 次式を導け

$$
\langle (\delta x)^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m\kappa^2} (\kappa t + e^{-\kappa t} - 1)
$$

(i) 十分時間が経過したとき $\langle (\delta x)^2 \rangle = 2Dt$ となる D を M と γ で表せ (Einstein の関係式)

(j) Einstein の関係式の物理的意味を説明せよ。