演習問題 7:GL 理論の基礎

問題 1. 平均場近似と GL 理論

(a) 配位数 z の N 個のスピンからなる Ising 模型のハミルトニアン $H = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i^z S_j^z - \mu B\sum_i S_i^z$ に対して, スピンの平均値 $\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_i \langle S_i^z\rangle$ をもちいてその揺らぎ $\delta S_i^z = S_i^z - \bar{S}$ の一次までとった平均場近似のハミルトニアン H_m がつぎのようになることを示せ。

$$H_m = -\mu B_e \sum_i S_i^z + NJz\bar{S}^2, \quad B_e = B + \frac{2Jz\bar{S}}{\mu}$$

(b) この近似でのスピンあたりの自由エネルギー f が次のようになることを示せ。ただし $e^{-\beta N f} = \mathrm{Tr} e^{-\beta H_m}$ である。

$$f = Jz\bar{S}^2 - \frac{1}{\beta}\log 2\cosh\frac{\beta\mu B_e}{2}$$

(c) $\bar{S}$ を f 最小の条件より定めることで次の関係式を導け。

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\tanh\frac{\beta\mu B_e}{2}$$

(d) 前問の関係式を $\bar{S}$ に関する self-consistent 方程式とみて、$B = 0$ の時の平均場の転移温度 $k_B T_C = \dfrac{Jz}{2}$ を導け。

(e) self-consistent 方程式から決まる $\bar{S} = \bar{S}(B)$ から $\bar{S}$ を B の磁場の関数と考える。$F = f + \mu\bar{S}B$ として F が B に依存しないこと $\dfrac{dF}{dB} = 0$ を示せ。

(f) 次の 2 つの展開を導け。$\log(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2}$, $\mathrm{Arctanh}\, x \approx x + \frac{x^3}{3}$ (なお $\mathrm{Arctanh}\, x = y \rightleftarrows x = \tanh y$)

(g) T_C 近傍で、$\bar{S}$, B がともに十分小さいとして F を $\bar{S}$ で表せ。

(h) $T > T_C$ と $T < T_C$ での　$F = F(\bar{S})$ のグラフを描け。

(i) $\dfrac{dF}{d\bar{S}} = \mu B$ を導き、磁場 $B = 0$ の時の $\bar{S}$ の値と前問のグラフの関係を議論せよ。

(j) $T < T_C$ において $T \sim T_C$ で磁化 $m = \mu\bar{S}$ の振る舞いを $\mu \sim (T_C - T)^{\beta}$ となる臨界指数 β を求めよ。

(k) 以下の空白を埋めよ (選べ)。

$\bar{S}$ は無次元化した $\boxed{1}$ である。$\boxed{1}$ の関数としての GL 自由エネルギー F は $\bar{S}$ の関数として $\boxed{2}$ であり、$F(\bar{S})$ は $\bar{S} \rightleftarrows -\bar{S}$ の $\boxed{3}$ に対して不変である。高温相は Ising 模型のスピンが特定の方向を $\boxed{\text{4:向いた/向いていない}}$ 相であり、$\boxed{3}$ に対して $\boxed{5}$ な相であるが、低温相においてはスピンは特定の方向を $\boxed{\text{6:向いた/向いていない}}$ $\boxed{6}$ が $\boxed{7}$ に破れた相である。高温から温度を下げる際、転移温度以上ではスピンの全系での平均は $\boxed{8}$ であるにもかかわらず、局所的にはスピンが揃っていると見なせる領域が少しづつ拡大していく。この大きさ ξ をスピンの $\boxed{9}$ と呼ぶが、この $\boxed{9}$ は臨界点で $\xi \sim (T - T_C)^{-\nu}$ のように $\boxed{10}$ する。これは揺らぎが転移温度に向かって $\boxed{11}$ することを意味する。この ν や β は $\boxed{12}$ とよばれ、模型の詳細に依存しない $\boxed{13}$ な物理量である。$\boxed{12}$ を決定するものは模型の詳細でなく、系の $\boxed{14}$ や $\boxed{1}$ の $\boxed{15}$ である。なお、この相転移は連続転移であり、$\boxed{16}$ 転移と呼ばれる。対して転移点で秩序変数に不連続がある転移を $\boxed{17}$ 転移と呼ぶ。

問題 2. 連続転移と不連続転移。以下転移温度を T_C とする。無次元化した秩序変数を x として GL の自由エネルギー $F(x)$ とする。次の場合の相転移をしらべ、転移の次数を述べよ。

(a) $F(x) = ax^2 + x^4,\ a = \dfrac{T - T_C}{T_C}$

(b) $F(x) = ax^2 - 2x^4 + x^6,\ a = 1 + \dfrac{T - T_C}{T_C}$