物理学 A

平成 20 年 11 月 15 日版

2008 年

初貝

目 次

第II部

相対運動と剛体の力学

第1章　質典系の運動

1.1　質点系の保存量

ここでは、質点が複数個あって、お互いに力を及ぼしあっている系の運動を考えましょう。質点は N 個あって、順に $i = 1, 2, \cdots, N$ と名前づけられていて、それぞれの位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$, 質量 m_i として、この質点に働く力を $\boldsymbol{F}_i$ と書きましょう。このとき、i 番目の質点の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i =& \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{F}_i \\
\boldsymbol{p}_i =& m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i
\end{aligned}
$$

となります。なお $\boldsymbol{p}_i$ は i 番目の質点の運動量です。

$M = \sum_i m_i$ を全質量として

$$
\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}
$$

を重心と定義したとき全運動量は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = M\dot{\boldsymbol{R}} \\
M &= \sum_i m_i : \text{全質量}
\end{aligned}
$$

となりますから、

質点系の運動量

> 質点系の全運動量は重心に全質量が集まったときの運動量に等しい

こととなります。よって運動方程式は

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}
$$

となりますから重心の運動は系の受ける合力 $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ に対して全質量が重心に集まった場合とおなじ運動方程式を満たします。

重心の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$$

特に各質点に働く力が、お互いに力を及ぼしあうことにより生じる場合、それぞれの力は次のように書けます。

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j}$$

ここで $\boldsymbol{F}_{i\leftarrow j}$ は質点 j が質点 i に及ぼす力を表します。なお、このような力を内力と呼びます。

このとき、作用反作用の法則より次の関係式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} &= -\boldsymbol{F}_{j\leftarrow i} \\ \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} &\propto \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \\ &\parallel \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \end{aligned}$$

このような内力のみが働く質点系に対して、全合力は次の計算のようにゼロとなることがわかります。

$$\begin{aligned} \sum_i \boldsymbol{F}_i &= \sum_i \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} \\ &= \sum_{i\neq j} \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} = \sum_{i<j} (\boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} + \boldsymbol{F}_{j\leftarrow i}) = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = 0$$

すなわち内力のみが働くとき全運動量は運動の定数となります。

一般に $\boldsymbol{r}$に作用する 力 $\boldsymbol{F}$ に対して次の（擬）ベクトル量を力のモーメント $\boldsymbol{N}$ と呼ぶとき

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

質点 i 運動量のモーメントである角運動量は

$$L_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

と定義されますので全角運動量は以下の関係式を満たします。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

ここで $\boldsymbol{N}$ は力のモーメントの総和です。

角運動量の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a})}{dt} = \boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

角運動量の時間変化はモーメントの総和に等しい。

特に、質点間に働く力が内力の場合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j(\neq i)} \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} \\ &= \sum_{i<j} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{j\leftarrow i}\right) \\ &= \sum_{i<j} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j} - \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j}\right) \\ &= \sum_{i<j} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{i\leftarrow j}\end{aligned}$$

となります。ここで最後に作用反作用の法則を用いました。さらに質点間に働く力は、質点間を結ぶベクトルに平行ですから外積の定義から

$$\boldsymbol{N} = 0$$

と <u>内力による力のモーメントは消失する</u> こととなります。よって角運動量 $\boldsymbol{L}$ も保存量となります。$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0$

以上、内力のみが働く場合の保存則をまとめておきましょう。

内力のみが働く質点系の保存量

全運動量と全角運動量は保存する。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = 0, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$$
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0, \qquad \boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

1.2 重心

質点系の重心とは次のように定義されますが、

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$
$$M = \sum_i m_i$$

前節で示したように質点系の全運動量 $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$ は重心にある全質量が集まった場合のの運動量と等しくなります。

全運動量と重心の運動量

$$\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$$

次に角運動量ですが、角運動量を重心周りのもので表すことを考えてみましょう。そのために

$$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$$

とすれば

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}) = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i - M\boldsymbol{R} = 0$$

となりますから

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i = \sum_i \boldsymbol{p}'_i = 0$$

となります。ここで $\boldsymbol{p}'_i$ はつぎのような i-番目の質点の重心に対する運動量です。

$$\boldsymbol{p}'_i = m_i \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{p}_i - m_i \dot{\boldsymbol{R}}$$

これらを用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i \boldsymbol{L}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \\ &= \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{p}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} \\ &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{L}_R\end{aligned}$$

となります。ここで

$$\boldsymbol{L}_R = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$$

は重心の角運動量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}) &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times (\boldsymbol{p}'_i + m_i\boldsymbol{R}) = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i + \sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{R} \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i\end{aligned}$$

は重心 $\boldsymbol{R}$ を原点としたときの質点の全角運動量です。ここでわかったことをまとめて起きましょう。

重心周りの角運動量

全角運動量は重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_R$ と重心を原点としたときの角運動量の和で与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{L}_R \\ \boldsymbol{L}_R &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}) &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i\end{aligned}$$

次に運動エネルギーを考えてみましょう。系の全運動エネルギー T は次のよう

に書き直せます。

$$
\begin{aligned}
T =& \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i} = \sum_i \frac{(\boldsymbol{p}'_i + m_i\dot{\boldsymbol{R}})^2}{2m_i} \\
=& \sum_i \frac{\boldsymbol{p}'^2_i}{2m_i} + \sum_i \boldsymbol{p}'_i \cdot \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{R}}^2 \sum_i \frac{m_i}{2} \\
=& T' + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 \\
=& T' + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
T' = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}'^2_i}{2m_i}
$$

となります。よって

重心周りの運動エネルギー

全運動エネルギーは重心に対する各質点の全運動エネルギーと重心の運動エネルギーの和となる。

$$
T = T' + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M}
$$

1.3　2体問題

2つの質点系の運動は2体問題と呼ばれますが、これを一般に考えて見ましょう。2つの質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ としたときその運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_A\ddot{\boldsymbol{r}}_A =& \boldsymbol{F}_{A\leftarrow B} \\
m_B\ddot{\boldsymbol{r}}_B =& \boldsymbol{F}_{B\leftarrow A} \\
\boldsymbol{F}_{B\leftarrow A} =& -\boldsymbol{F}_{A\leftarrow B} = K(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)
\end{aligned}
$$

と書けます。よって相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ と重心座標に対して

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} =& \frac{m_A\boldsymbol{r}_A + m_B\boldsymbol{r}_B}{m_A + m_B} \\
\boldsymbol{r} =& \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A
\end{aligned}
$$

ですから，　まず重心の運動に関して

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = m_A\ddot{\boldsymbol{r}}_A + m_B\ddot{\boldsymbol{r}}_B = \boldsymbol{F}_{A\leftarrow B} + \boldsymbol{F}_{B\leftarrow A} = 0$$

となります。つまり重心は質量 M の質点として自由運動を行います。一方相対座標について

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_B - \ddot{\boldsymbol{r}}_A = \frac{K\boldsymbol{r}}{m_A} - \frac{-K\boldsymbol{r}}{m_B} = \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)K\boldsymbol{r}$$

よって

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = K\boldsymbol{r}$$

と相対座標は中心力による質点 m の運動を行います。ここで換算質量とよばれる m は次のように定義されます。

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}$$

以上 2 体問題に関する考察をまとめておきましょう。

2 体問題

2 体問題は重心座標と相対座標に分離でき、重心座標は等速運動（自由運動）を行い相対座標に関しては以下の換算質量を持った質点の中心力による運動と見なせる。

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = K\boldsymbol{r}$$

1.4　連成振動

n この質量 m の質点がバネ定数 k のバネで等間隔に直線上に並んでいるとする。この系の運動を考えよう。n 番目の質点の平衡位置からのずれを x_n としたとき運動方程式は

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= \qquad\qquad\qquad + k(x_2 - x_1)\\
m\ddot{x}_n &= -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n),\ n = 2, \cdots, N-1\\
m\ddot{x}_N &= -k(x_N - x_{N-1})
\end{aligned}$$

とかけるから $\Omega^2 = k/m$ として

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 =& \qquad\qquad\qquad\quad + \Omega^2(x_2 - x_1) \\
\ddot{x}_n =& \Omega^2(x_{n-1} - x_n) + \Omega^2(x_{n+1} - x_n),\ n = 2, \cdots, N-1 \\
\ddot{x}_N =& \Omega^2(x_{N-1} - x_N)
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=1}^{N} x_n = 0$$

すなわち

$$\begin{aligned}
\ddot{R} =& const. \\
R =& x_1 + \cdots + x_N
\end{aligned}$$

と重心 R は等速運動をする。もう少し丁寧に議論してみよう。

$$\begin{aligned}
x_n^k =& X_n^k e^{i\omega t} \\
X_n^k =& \cos \pi \frac{(n - \frac{1}{2})k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1
\end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned}
X_1^k =& X_0^k \\
X_N^k =& X_{N+1}^k
\end{aligned}$$

なので以下の関係式をすべての n に使ってよいこととなる。

$$\ddot{X}_n = \Omega^2(X_{n-1} - 2X_n - X_{n+1})$$

これに代入して[1]

$$
\begin{aligned}
X_{n-1} - 2X_n - X_{n+1} =& \cos\pi\frac{(n-3/2)k}{N} + \cos\pi\frac{(n+1/2)k}{N} - 2\cos\pi\frac{(n-1/2)k}{N} \\
=& 2\cos\pi\frac{(n-1/2)k}{N}\cos\pi\frac{k}{N} - 2\cos\pi\frac{(n-1/2)k}{N} \\
=& 2(\cos\pi\frac{k}{N} - 1)X_n^k \\
=& -4\sin^2\frac{\pi k}{2N}X_n^k
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
-\omega_k^2 =& -4\Omega^2\sin^2\kappa_k \\
\kappa_k =& \frac{\pi k}{2N} : 0 \to \pi/2
\end{aligned}
$$

よって一般の運動は C_k を任意の定数として

$$
x_n(t) = \sum_k C_k e^{i\omega_k t}\cos\pi\frac{(n-1/2)k}{N}
$$

と書け、C_k は初期条件より定まる。強制振動の例からわかるように、外力がこの ω_k に等しい振動数で加えられたとき、共鳴的に系のエネルギーは増大する。この $e^{i\omega_k t}X_n^k$ を基準振動とよぶ。特に $N \to \infty$ のとき

$$
\omega_\kappa = \Omega\sin\kappa
$$

これは $\kappa \to 0$ のとき

$$
\omega \propto \kappa
$$

となる（エネルギー分散）。空気の音波（粗密波）、固体中の音響型フォノンはこれと同様の分散をもち、$\kappa \to 0$ でエネルギーゼロのなることが重心の並進の自由度に対応する。

1

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha\pm\beta) =& \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha sin\beta \\
\cos A + \cos B =& 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}
\end{aligned}
$$

図 1.1: 連成振動

第2章　座標系と慣性力

2.1　相対運動と慣性系

まずある静止した系 R (rest) があるとして、その静止系に固定された座標系 $O^R = (\boldsymbol{e}_1^R, \boldsymbol{e}_2^R, \boldsymbol{e}_3^R)$ により質点の運動が記述されているとしましょう。つまり位置ベクトル $\vec{r}^R$ にある質量 m の質点に力 $\vec{F}^R$ が働くとき質点は次の運動方程式に従うとしましょう。

$$m\ddot{\vec{r}}^R = \vec{F}^R$$

ここで位置ベクトル $\boldsymbol{r}^R$ は一般に

$$\begin{aligned}
\vec{r}^R &= \boldsymbol{e}_1^R x_1 + \boldsymbol{e}_2^R x_2 + \boldsymbol{e}_3^R x_3 = \boldsymbol{e}_i^R x_i = O^R \boldsymbol{r}^B \\
O^R &= (\boldsymbol{e}_1^R, \boldsymbol{e}_2^R, \boldsymbol{e}_3^R) \\
\boldsymbol{r}^R &= \begin{pmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書けます。

この質点を運動する系 B (boost) 上に固定された座標系 $O^B = (\boldsymbol{e}_1^B, \boldsymbol{e}_2^B, \boldsymbol{e}_3^B)$ で記述することを考えてみましょう。前節では座標系の原点は動かないとしましたがここでは原点も移動することを許してみましょう。[1] 運動する系 B の原点の位置ベクトルを $\vec{r}^0$ と書けば、任意の点の位置ベクトルを静止系でみて $\vec{r}^R$, 運動系でみて $\vec{r}^B$ とすれば、

$$\vec{r}^R = \vec{r}^0 + \vec{r}^B$$

静止系でのこれらのベクトルの成分をもちいれば次のようになります。

$$x_i^R = x_i^0 + x_i^B$$

[1]駅のホーム上の質点の運動を電車の中から観測するときなどがこの場合に対応します。

ここで

$$\vec{r}^R = \boldsymbol{e}_i^R x_i^R = O^R \boldsymbol{r}^R,\ \boldsymbol{r}^R = \begin{pmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ x_3^R \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}^0 = \boldsymbol{e}_i^R x_i^0 = O^R \boldsymbol{r}^0,\ \boldsymbol{r}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}^B = \boldsymbol{e}_i^R x_i^B = O^R \boldsymbol{r}^B,\ \boldsymbol{r}^B = \begin{pmatrix} x_1^B \\ x_2^B \\ x_3^B \end{pmatrix}$$

と書けます。

$\vec{r}^B$ による記述は $\vec{r}^0$ に対する相対運動とよばれます。

このとき運動方程式を $\ddot{\vec{r}}^R = \ddot{\vec{r}}^0 + \ddot{\vec{r}}^B$ をもちいて

$$m\ddot{\vec{r}}^B = \vec{F} + \vec{F}^I$$
$$\vec{F}^I = -m\ddot{\vec{r}}^0$$

となりますから運動座標系としては運動方程式に $\vec{F}^I$ だけ余分な力が働くようにみえます。これを 慣性力 とよびます。

たとえば自由落下するエレベータの中の質点の運動を考えてみましょう。.....

特に $\vec{F}^I = 0$ すなわち $\dot{\vec{r}}^0 =$ 一定 のとき、相対運動の運動方程式は静止系と運動方程式は不変となります。質点の運動からは座標系の等速運動は静止系と区別できないこととなります。これから絶対的に静止した運動座標系は運動学的には定義できず、すべての等速度運動 (速度ゼロを含む）はお互いに同等となります。この事実は ガリレイの等価原理 と呼ばれ、等速度運動する座標系を 慣性系 と呼びます。

ガリレイの等価原理

運動学的にすべての慣性系（等速度運動する系）は同等である。

2.2 座標変換と運動座標系

ここではしばらく原点は同じすなわち $\vec{r}^0 = 0$ として一般の運動座標系について考察をすすめてみましょう。ここで一般のベクトル $\vec{x}$ を扱いましょう。まず $\vec{x}$ は

静止系の基底 O^R で以下のように展開されているとしましょう。

$$\vec{x} = O^R \boldsymbol{x}$$

ここでベクトル $\vec{x}$ を 運動座標系 B 系での基底 $O^B = (\boldsymbol{e}_1^B, \boldsymbol{e}_2^B, \boldsymbol{e}_3^B)$ で展開したときの成分 $x_i'^B$ を用いて次のように書きましょう。

$$\vec{x} = \boldsymbol{e}_i^B x_i' = O^B \boldsymbol{x}'$$

$$\boldsymbol{x}'^B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

このベクトルを静止系 R　の基底で書き直してみましょう。なお座標系の規格直交性から

$$\widetilde{O^R} O^R = \widetilde{O^B} O^B = E_3$$

完全性から

$$O^R \widetilde{O^R} = O^B \widetilde{O^B} = E_3$$

が成立することとなります。

$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ は前節で議論したベクトルの座標変換ですから一般のベクトルの成分の変換則から、直交行列 T があって

$$\boldsymbol{x}' = T \boldsymbol{x}$$

となりますが、ここでの考察から

$$O^R \boldsymbol{x} = O^B \boldsymbol{x}'$$
$$\boldsymbol{x}' = \widetilde{O^B} O^R \boldsymbol{x}$$

となりますから

$$T = \widetilde{O^B} O^R$$
$$\widetilde{T} T = \widetilde{O^R} O^B \widetilde{O^B} O^R = E_3$$

です。

$$\vec{x} = O^R \boldsymbol{x} = O^B \boldsymbol{x}'$$

と書いたとき、運動座標系とは座標系（の基底）O^B が時間に依存することですのでこれに注意して微分すれば

$$\dot{\vec{x}} = \dot{O}^B \boldsymbol{x}' + O^B \dot{\boldsymbol{x}}'$$

となります。ここで基底の満たす規格直交性をあらわす関係式を微分して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\widetilde{O^B} O^B) &= 0\\ &= \dot{\widetilde{O^B}} O^B + \widetilde{O^B} \dot{O}^B\end{aligned}$$

これを $\dot{O}^B$ について解いて

$$\dot{O}^B = -\, O^B \dot{\widetilde{O^B}} O^B$$

となりますから

$$\dot{\vec{x}} = O^B(\dot{\boldsymbol{x}}' - \dot{\widetilde{O^B}} O^B \boldsymbol{x}')$$

となります。ここで

$$\widetilde{\dot{\widetilde{O^B}} O^B} = \widetilde{O^B} \dot{O}^B = -\dot{\widetilde{O^B}} O^B$$

ですから $\dot{\widetilde{O^B}} O^B$ は反対称行列であり、ある ω_k をもちいて

$$(\dot{\widetilde{O^B}} O^B)_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k$$

と書けます。これから

$$\dot{\vec{x}} = O^B(\dot{\boldsymbol{x}})'$$

と書いたとき $(\dot{\boldsymbol{x}})'$ は運動座標系での $\dot{\vec{x}}$ を表すベクトルですが、これが以下のように書けることを意味します。

$$((\dot{\boldsymbol{x}})')_i = \dot{x}'_i - \epsilon_{ijk}\omega_k x'_j$$

これはまとめて

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{x}})' &= \dot{\boldsymbol{x}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}'\\ &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}'\end{aligned}$$

とも書くことができます。ここで $(\dot{\boldsymbol{x}})'$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の時間変化を運動座標系 O^B で展開したときの成分からなるベクトルを表し $\dot{\boldsymbol{x}}'$ は $\boldsymbol{x}$ の運動座標系での成分の時間微分を成分とするベクトルです。座標系が時間に依存しなければ第 1 項のみとなりますが、時間依存する座標系ではここでの第 2 項分だけ余分な項が必要となるわけです。（座標系の原点は等しくとも）

次にここで現れた $\boldsymbol{\omega}$ の意味を考えてみましょう。座標系のの原点は移動しませんので、この運動は一般には回転軸が時間依存する回転であると考えられます。特に 3(z)-軸正方向周りの角速度 Ω の回転を考えれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cos\Omega t + \boldsymbol{e}_2 \sin\Omega t\\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\boldsymbol{e}_1 \sin\Omega t + \boldsymbol{e}_2 \cos\Omega t\\ \boldsymbol{e}'_3 &= \boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

となります。これから

$$O^B = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t & \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & \\ & & 1\end{pmatrix} = O^R\begin{pmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t & \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{aligned}\widetilde{\dot{O}}^B O^B &= \Omega\begin{pmatrix}-\sin\Omega t & \cos\Omega t & \\ -\cos\Omega t & -\sin\Omega t & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t & \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & \\ & & 1\end{pmatrix}\\ &= \Omega\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

であることを意味する。

$\boldsymbol{\omega}$ はベクトルであるから一般にこの $\boldsymbol{\omega}$ は座標系の瞬間的回転軸の方向でかつ、その大きさが右回りの回転速度を表すベクトルとなります。（図）

これを以下まとめておきましょう。

回転座標系でのベクトルの時間変化

運動座標系が瞬間的には $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ 方向で右ねじまわりに角速度 $|\boldsymbol{\omega}|$ の回転しているとき、一般のベクトル $\boldsymbol{x}$ の運動座標系における成分を $\boldsymbol{x}'$ と書いたとき、その時間変化を表すベクトルは以下の通り書き表される。

$$(\dot{\boldsymbol{x}})' = \dot{\boldsymbol{x}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}' = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}'$$

これを点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とその回転座標系による表示 $\boldsymbol{r}'$ に対して使えば、速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ (静止座標系で微分したもの) を運動座標系でみたときの速度ベクトル $\boldsymbol{v}'$ は次のようになります。

回転座標系でみな速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

同様に加速度ベクトルを考えると静止系での加速度ベクトル $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ を運動座標系で表すには、一般のベクトルの微分の公式を速度ベクトルに対して適用すればよいので、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ として

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}' &= \dot{\boldsymbol{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \\
&= \ddot{\boldsymbol{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \\
&= \ddot{\boldsymbol{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

これもまとめておきましょう。

回転座標系での加速度ベクトル

$$\boldsymbol{a}' = \ddot{\boldsymbol{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

これから静止座標系（慣性系）で力 $\boldsymbol{F}$ がはたらく質点の運動座標系における運動方程式 $m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'$ は次のように書き直せることとなります。

回転座標系による慣性力

$$\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{r}}' &= \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}'_I \\
\boldsymbol{F}'_I &= -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{F}'_I$ は座標系が瞬間的に回転運動していることによる慣性力です。
特に等速回転運動の場合を考えてみると $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ であり、

$$\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

だから

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = |\omega|^2 |\boldsymbol{r}'| \sin\theta$$

ここで θ は $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角度となります。

$$\boldsymbol{\rho} = -\hat{\rho} |\boldsymbol{r}'| \sin\theta$$

は回転軸から質点までのベクトルを意味するとして

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{r}' = m\omega^2 \rho = m\frac{(|\rho|\omega)^2}{|\rho|}\hat{\rho} = m\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho}, \quad v = \rho\omega$$

となりますが、これはよく知られた遠心力を意味します。
また最後の項である

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

はコリオリの力と呼ばれます。

2.3　地球上でのコリオリの力

地球は地軸を中心に回転していますから、遠心力とともにコリオリの力を受けます。この節ではこのコリオリの力について少し議論してみましょう。まず回転の角速度が以下のようにかなり小さいことにまず注意しましょう。

$$|\omega| = \left(\frac{2\pi}{3600 \times 24}\right)[\mathrm{sec}^{-1}] \approx 7.3 \times 10^{-5}[\mathrm{sec}^{-1}]$$

ここで公転の影響は無視しました。また遠心力は赤道半径 $R =$
この節では回転座標系でのベクトルであることを示す　’は省略すれば質量 m, 速度 $\boldsymbol{v}$ の質点に働くコリオリの力 $\boldsymbol{F}_c$ は

$$\boldsymbol{F}_c = -2m\omega \times \boldsymbol{v}$$

となります。
自転は北半球を上にして右ねじに向いていますから、北半球では回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は水平面から外に向いています。よってコリオリ力は進行方向に対して右にそれる方向に働きます。例えば台風の風が中心に向かって逆時計回りに吹き込むのはこのコリオリの力のためと考えられます。

2.3.1 地上での自由落下

遠心力を含めた重力加速度を $\boldsymbol{g}$ と書いたとき地表上での質量 m の質点の自由落下の運動方程式は

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

となります。

ω が小さいことを考えてこの解を逐次近似により解くことを考えましょう。まず $\omega = 0$ の時の解は、初速度なしで自由落下させることを考えて $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{g}t$ かけることに注意しましょう。よって $\boldsymbol{v}^1$ を ω による補正項として $|\boldsymbol{v}^1| << |\boldsymbol{v}^0|$ として

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^0$$

と書き運動方程式に代入しましょう。ただし逐次近似の精神にしたがって右辺では $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ に対する $\boldsymbol{v}^1$ の効果は高次の項として無視して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0$ とします。よって

$$\dot{\boldsymbol{v}^1} = 2\boldsymbol{v}^0 \times \boldsymbol{\omega} = 2t\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{\omega}$$

これを積分して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^1 &= t^2 \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} &= t\boldsymbol{g} + t^2 \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

さらに積分して積分定数をいれて

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0 + \frac{1}{2}t^2\boldsymbol{g} + \frac{1}{3}t^3\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{\omega}$$

となる。ここで z 軸を鉛直上向き、x 軸を水平面上北向きにとれば, 緯度 α として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha), 0, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ &= \omega(\cos\alpha, 0, \sin\alpha) \\ \boldsymbol{g} &= (0, 0, -g) \\ \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{\omega} &= (0, -g\cos\alpha, 0) \end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned} x &= X_0 \\ y &= Y_0 - \frac{1}{3}t^3 g\omega\cos\alpha \\ z &= Z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Z_0 から高さ h 自由落下するとすれば

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となりますから

$$\begin{aligned}\delta y \equiv& y - Y_0 = -\frac{1}{3} g\omega\cos\alpha \frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}}\\ =& -\frac{\omega\cos\alpha}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\end{aligned}$$

– は東にずれることを意味します。これだけコリオリ力によりずれが生ずるのです。

2.3.2 フーコーの振り子

振動数 Ω の振り子を前節の座標系で水平面 xy の単振動と考えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =& (v_x, v_y, 0) = (\dot{x}, \dot{y}, 0)\\ \boldsymbol{\omega} =& \omega(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)\\ 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} =& (v_y\omega\sin\alpha, -v_x\omega\sin\alpha, 0)\end{aligned}$$

となるので、単振動の運動方程式は次のようになります

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} =& -\Omega^2\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}\\ \ddot{x} =& -\Omega^2 x + (2\omega\sin\alpha)\dot{y}\\ \ddot{y} =& -\Omega^2 y - (2\omega\sin\alpha)\dot{x}\end{aligned}$$

ここで $z = x + iy$ とすれば

$$\ddot{z} = -\Omega^2 z + (2\omega\sin\alpha)(-i\dot{z})$$

さらに $z = Ze^{i\lambda t}$ と置くと

$$-\lambda^2 = -\Omega^2 + 2\lambda\omega\sin\alpha$$

これを整理して

$$\lambda^2 + 2(\omega\sin\alpha)\lambda - \Omega^2 = 0$$

この解は

$$\lambda = \omega\sin\alpha \pm \sqrt{\omega^2\sin^2\alpha + \Omega^2} \approx \omega\sin\alpha \pm \Omega$$

これから, A, B を任意の定数として

$$z = e^{it\omega\sin\alpha}(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t})$$

が一般解となります。ここで $\Omega >> \omega$ であることから $t\omega\sin\alpha << 1$ であるとき、すなわち十分短時間では、振動が x 平面内に限られるとしてみましょう。(x 面内の単振り子)この条件下では $C > 0$ として

$$z = Ce^{it\omega\sin\alpha}\cos\Omega t$$

となりますから長時間の振る舞いは

$$x = \mathrm{Re}\, z = C\cos(t\omega\sin\alpha)\cos\Omega t$$
$$y = \mathrm{Im}\, z = C\sin(t\omega\sin\alpha)\sin\Omega t$$

となります。これは振動数 Ω の単振動面がゆっくりと振動数

$$\omega\sin\alpha$$

で北半球では $\alpha > 0$ ですから右回りに(南半球では左回りに)回転することを意味します。

この現象をフーコー (Foucault) の振り子と呼びます。これは地球が慣性系に対して回転していることを直接しめす実験事実と考えられます。

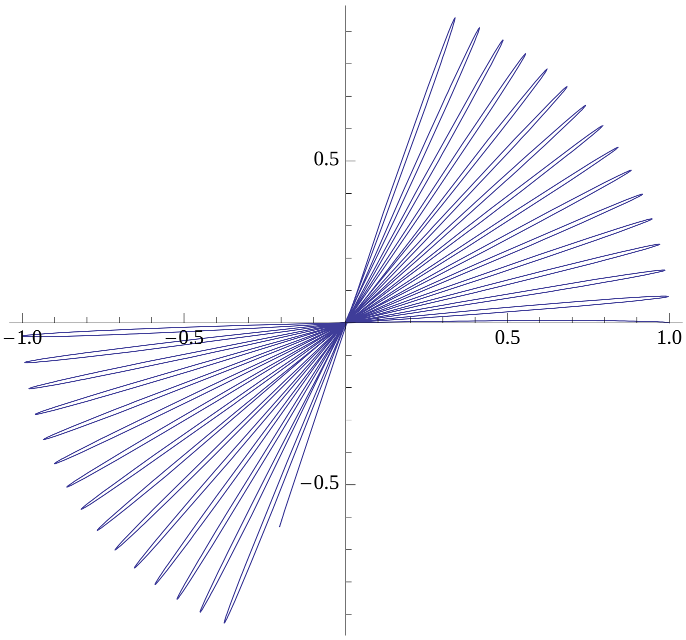

図 2.1: フーコーの振り子の軌跡

第3章　剛体の運動

3.1　剛体の運動

質点系がその相対位置を固定されている場合、これらをまとめて取り扱う際、この質点系を剛体と呼びます。このとき、剛体上の任意に固定された点を原点とする座標系を考えましょう。この座標系の原点の速度 $\boldsymbol{V}$ とすれば、剛体を構成する相対座標 $\boldsymbol{r}$ の点の速度 $\boldsymbol{v}$ は、剛体上の座標系で剛体の各点の座標は不変であることに注意すると前節までの議論から

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

と与えられます。ここで $\boldsymbol{\omega}$ は剛体上任意にとった原点を中心とする回転を表現するベクトルです。

3.2　剛体の角運動量

質点 $\boldsymbol{r}_i$ の位置ベクトル原点を $\boldsymbol{R}$ だけ移動すれば $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$ となるが、運動量は不変 $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$ ですから角運動量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}' &= \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{L} - \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

だけ変化します。剛体の角運動量を議論するときはその重心を原点とするのが、わかりやすいので以下、<u>明示しない限り、原点は重心としましょう</u>。よって相互位置の変化しない質点系つまり剛体に対して

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = 0$$

と仮定します。

このとき各質点の速度は重心の速度 $\boldsymbol{V}$ として

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$$

であることに注意すると (剛体ですから各点の回転速度は等しいことになります) 剛体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は以下のようになります。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i)\\ &=(\sum m_i \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{V} + \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\\ &= \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\end{aligned}$$

これを成分で書けば ($_i$ を省略して)

$$\begin{aligned}L_a &= \sum m \epsilon_{abc} r_b \epsilon_{cde} \omega_d r_e = \sum m \epsilon_{abc} \epsilon_{dec} r_b \omega_d r_e\\ &= \sum m(\delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}) r_b \omega_d r_e\\ &= \sum m(r_b \omega_a r_b - r_b \omega_b r_a)\\ &= \sum m(\delta_{ab} r_c r_c - r_a r_b)\omega_b\end{aligned}$$

これは慣性モーメントテンソル（慣性テンソル）I_{ab} を

$$I_{ab} = \sum m(\delta_{ab} r_c r_c - r_a r_b)$$

と定義して

$$L_a = I_{ab}\omega_b$$

となります。この慣性テンソルは明らかに対称であり

$$I_{ab} = I_{ba}$$

座標変換の下で

$$\begin{aligned}I'_{a'b'} &= \sum m(\delta'_{a'b'} r'_{c'} r'_{c'} - r'_{a'} r'_{b'})\\ &= \sum m(T_{a'a} T_{b'b} \delta_{ab}\, T_{c'd} r_d T_{c'e} r_e - T_{a'a} r_a T_{b'b} r_b)\\ &= \sum m(T_{a'a} T_{b'b} \delta_{ab}\, \delta_{de} r_d r_e - T_{a'a} r_a T_{b'b} r_b)\\ &= \sum m(T_{a'a} T_{b'b} \delta_{ab} \delta_{de} r_d r_e - T_{a'a} r_a T_{b'b} r_b)\\ &= T_{a'a} T_{b'b} \sum m(\delta_{ab} r_d r_d - r_a r_b)\\ &= T_{a'a} T_{b'b} I_{ab}\end{aligned}$$

と変換します。ここで $\delta'_{a'b'} = \delta_{a'b'}$ は 2 階の（不変）テンソル、ベクトル r_a であり、座標変換の行列 T を用いて、次のように変換するとしました

$$\begin{aligned}\delta'_{a'b'} &= T_{a'a} T_{b'b} \delta_{ab} \quad = T_{a'a} T_{b'b} = \begin{cases} 1 & a' = b' \\ 0 & \text{その他} \end{cases}\\ r'_{a'} &= T_{a'a} r_a\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
T_{a'a}T_{a'b} &= \delta_{ab} \\
T_{a'a}T_{b'a} &= \delta_{a'b'}
\end{aligned}
$$

です。

このような変換則に従う物理量は (2 階の) テンソルと呼ばれます。また具体的には以下のような形に書けます。

$$
I = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(z^2+x^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}
$$

特に I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} を慣性モーメント、$I_{xy}, I_{yz} I_{zx}$ を慣性乗積と呼ばれます。

剛体の角運動量と慣性モーメントテンソル

$$
\begin{aligned}
L_a &= I_{ab}\omega_b \\
I_{ab} &= \sum m(\delta_{ab} r_c r_c - r_a r_b)
\end{aligned}
$$

このとき以下の量は

$$
J = I_{ab}X_a X_b = \widetilde{\boldsymbol{X}} I \boldsymbol{X}
$$

座標変換に対して

$$
\begin{aligned}
J' &= I'_{a'b'}X'_{a'}X'_{b'} \\
&= T_{a'a}T_{b'b}I_{ab}T_{a'c}X_c T_{b'd}X_d \\
&= T_{a'a}T_{b'b}T_{a'c}T_{b'd}I_{ab}X_c X_d \\
&= \delta_{ac}\delta_{bd}I_{ab}X_c X_d \\
&= I_{ab}X_a X_b = J
\end{aligned}
$$

とスカラーとなり、座標系によらず定まりますから

$$
J = 1
$$

とおいた 3 次元内の 2 次曲面 $(X_1, X_2, X_3) = (X, Y, Z)$ がこれまた座標系によらず定まります。これを <u>慣性楕円体</u> と呼びます。

一般に実対称行列は直交変換で対角化でき、その固有値は実となります。それを I_1, I_2, I_3 直交した完全な 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ があって

$$I(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)\begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

ととれます。よって

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}$$

として

$$J = I_1(X')^2 + I_2(Y')^2 + I_3(Z')^2$$

となります。この $I_i, i = 1, 2, 3$ は主慣性モーメントと呼ばれ、$\boldsymbol{E}_i$ の方向は慣性主軸とよばれます。

また

$$\begin{aligned} J =& X^2 \sum m(y^2 + z^2) + Y^2 \sum m(z^2 + x^2) + Z^2 \sum m(x^2 + y^2) \\ & - 2XY \sum mxy - 2YZ \sum myz - 2ZX \sum mzx \\ =& \sum m[(Xy - Yx)^2 + (Yz - Zy)^2 + (Zx - Xy)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

と負にはなりませんから、つぎのように主慣性モーメントは負になりません。

$$I_i \geq 0$$

これは座標変換を $T = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)$ としたとき $'$ 系において

$$\begin{aligned} I'_{11} =& I_1 \\ I'_{22} =& I_2 \\ I'_{33} =& I_3 \\ I'_{ab} =& 0 \quad (a \neq b) \end{aligned}$$

を意味します。よって

$$\begin{aligned} L'_{a'} =& T_{a'a} L_a = T_{a'a} I_{ab} \omega_b \\ =& T_{a'a} I'_{c'd'} T_{c'a} T_{d'b} \omega'_{b'} T_{b'b} \\ =& I'_{c'd'} \omega'_{b'} T_{a'a} T_{c'a} T_{d'b} T_{b'b} \\ =& I'_{c'd'} \omega'_{b'} \delta_{a'c'} \delta_{d'b'} \\ =& I'_{a'b'} \omega'_{b'} \end{aligned}$$

すなわち ′ 系では角運動量は簡単に

$$
\begin{aligned}
L'_1 =& I_1\omega'_1 \\
L'_2 =& I_2\omega'_2 \\
L'_3 =& I_3\omega'_3
\end{aligned}
$$

となることを意味します。ここでベクトル ω_a の逆変換は

$$
\begin{aligned}
\omega'_{a'} =& T_{a'a}\omega_a \\
\omega'_{a'}T_{a'b} =& T_{a'b}T_{a'a}\omega_a = \delta_{ba}\omega_a = \omega_b
\end{aligned}
$$

であり、2 階のテンソルは

$$
\begin{aligned}
I'_{a'b'} =& T_{a'a}T_{b'b}I_{ab} \\
I'_{a'b'}T_{a'c}T_{b'd} =& T_{a'a}T_{b'b}I_{ab}T_{a'c}T_{b'd} = I_{ab}\delta_{ac}\delta_{dd} \\
=& I_{cd}
\end{aligned}
$$

と逆変換が与えられることを使いました。
以上をまとめておきましょう。

慣性主軸と角運動量

慣性主軸の方向に座標系をとれば主慣性モーメント $I_i \geq 0$ であり、

$$
L_1 = I_1\omega_1, L_2 = I_2\omega_2, L_3 = I_3\omega_3
$$

となります。

3.3 慣性モーメント

まずある方向 $\boldsymbol{n}, |\boldsymbol{n}| = 1$ の慣性モーメント I_n を

$$
I_n = I_{ij}n_in_j
$$

としましょう。これは座標変換 T について

$$
\begin{aligned}
I'_n =& I'_{i'j'}n'_{i'}n'_{j'} = T_{i'i}T_{j'j}I_{ij}T_{i'k}n_kT_{j'\ell}n_\ell = T_{i'i}T_{j'j}T_{i'k}T_{j'\ell}I_{ij}n_kn_\ell \\
=& \delta_{ik}\delta_{j\ell}I_{ij}n_kn_\ell = I_{ij}n_in_j = I_n
\end{aligned}
$$

となりますからスカラーとなり座標系によらない意味をもちます。

特に慣性主軸を座標系としたとき方向余弦 $\boldsymbol{g} = (\alpha, \beta, \gamma)$ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ の方向の慣性モーメント I_g は

$$\boldsymbol{E}_g = \alpha \boldsymbol{E}_1 + \beta \boldsymbol{E}_2 + \gamma \boldsymbol{E}_3 E$$

方向の慣性モーメントを求めればよいので回転行列 T はつぎの関係式を満たします。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

すなわち

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

となるはずです。これを用いると $\boldsymbol{E}_g$ 方向の慣性モーメントは座標系が慣性主軸にとられていることに注意して

$$\begin{aligned} I_g &= I'_{1'1'} = T_{1'i} T_{1'j} I_{ij} = T_{1'i} T_{1'j} I_{ij} \quad \delta_{ij} \\ &= \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33} \end{aligned}$$

となります。

特定の方向の慣性モーメント

慣性主軸を座標系として、方向余弦 $(\alpha, \beta\gamma)$ 方向の軸周りの慣性モーメント I_g は以下のようになる。

$$I_g = \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33}$$

次に慣性テンソルの性質をまとめてから、具体的な値を幾つかの剛体について求めましょう。まず、我々の原点が重心にあることに注意し、重心以外の任意の点 $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}$ を原点としたときの慣性テンソル類似のテンソル $I_{ij}(\boldsymbol{a})$ を

$$I_{ij}(\boldsymbol{a}) = \sum m(\delta_{ij} r'_k r'_k - r'_i r'_j)$$

とします。ただし

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$$

です。これから

$$\begin{aligned}
I_{ij}(\boldsymbol{a}) &= \sum m(\delta_{ij}(r_k - a_k)(r_k - a_k) - (r_i - a_i)(r_j - a_j)) \\
&= I_{ij}(\boldsymbol{0}) - 2\sum m\delta_{ij}a_k r_k + 2\sum m a_i r_j + \sum m(\delta_{ij}a_k a_k - a_i a_j) \\
&= I_{ij}(\boldsymbol{0}) - 2\delta_{ij}a_k \sum m r_k + 2a_i \sum m r_j + (\delta_{ij}a_k a_k - a_i a_j)\sum m \\
&= I_{ij} + M(\delta_{ij}a_k a_k - a_i a_j)
\end{aligned}$$

ここで $M = \sum m$ は全質量です。

特に慣性主軸を座標系としたとき、i 軸周りの慣性モーメントは

$$I_{ij}(\boldsymbol{a}) = I_{ij} + M(\delta_{ij}a_k a_k - a_i a_j)$$

となります。特に慣性主軸を座標系とすれば例えば z 軸周りの慣性モーメントは

$$I_3(\boldsymbol{a}) = I_3 + M(\boldsymbol{a}^2 - a_z^2) = I_3 + M(a_x^2 + a_y^2)$$

となります。よって

平行軸の定理

i 軸周りの主慣性モーメント I_i について重心から h だけ回転軸がずれた軸周りのモーメント $I_i(h)$ はつぎのようになる

$$I_i(h) = I_i + Mh^2$$

一般に慣性主軸に座標軸をとれば

$$I_1 = \sum m(r^2 - r_1^2) = \sum m(r_2^2 + r_3^2),\ I_2 = \sum m(r_3^2 + r_1^2),\ I_3 = \sum m(r_1^2 + r_2^2)$$

よって

$$I_1 + I_2 = \sum m(r_1^2 + r_2^2 + 2r_3^2) \geq \sum m(r_1^2 + r_2^2) = I_3$$

まとめて

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\geq I_3 \\
I_2 + I_3 &\geq I_1 \\
I_3 + I_1 &\geq I_2
\end{aligned}$$

という一般的な関係が導かれます。

また剛体に対称面があるとき、以下のような一般的な性質が導かれます。

(1) 重心は対称面内にある。

(2) 対称面内に 2 つの慣性主軸がある。

例えば xy 平面に対して対称な剛体について

$$I_{zx} = I_{yz} = 0$$

すなわち z 軸は慣性主軸

(3) 平面内に質点が分布している剛体 (薄板）についてはこの面を xy 面として

$$I_x + I_y = I_z \text{ (薄板の定理)}$$

なぜならば

$$I_x = \sum m(y^2 + z^2) = \sum my^2$$
$$I_y = \sum m(z^2 + x^2) = \sum mx^2$$
$$I_z = \sum m(x^2 + y^2) = I_x + I_y$$

(4) 質点が直線上 (z 軸) に分布していれば $I_x = I_y, I_z = 0$.

$$I_x = \sum m(y^2 + z^2) = \sum mz^2$$
$$I_y = \sum m(z^2 + x^2) = \sum mz^2$$
$$I_z = \sum (x^2 + y^2) = 0$$

これから主慣性モーメントにより剛体は次のように分類され称されます。

- 非対称コマ:I_1, I_2, I_3 がすべて異なるとき
- 対称コマ:I_1, I_2, I_3 のうち 2 つが等しいとき
- 球場コマ:$I_1 = I_2 = I_3$ と 3 つとも等しいとき

以下重心と慣性テンソルを幾つかの典型的剛体についてもとめてみましょう。

- 半径 R 質量 M の球殻

  重心は中心であり $i \neq j$ であれば $I_{ij} = \sum m(\delta_{ij}R^2 - r_i r_j) = 0$ であり、$I_{ii} = I_i = \sum m(R^2 - r_i r_i)$ (和はとらない) は i によらないから $I_1 + I_2 + I_3 = 3MR^2 - MR^2 = 2MR^2$ よって

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}MR^2$$

- 半径 R 質量 M の球

  球殻の集まりと考えて

$$
\begin{aligned}
I_1 =& I_2 = I_3 = \int_0^R \frac{M}{4\pi R^3/3}(4\pi r^2 dr)\frac{2}{3}r^2 = \frac{2M}{3R^3}\frac{1}{5}R^5 \\
=& \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}
$$

$$
I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3}MR^2
$$

- 一様な長さ ℓ の棒

  棒を z 軸として

$$
\begin{aligned}
I_x =& I_y = \sum mz^2 = 2\int_0^{\ell/2} \frac{M}{\ell} dzz^2 = \frac{2M}{\ell}\frac{1}{3}(\frac{\ell}{2})^3 \\
=& \frac{1}{12}M\ell^2
\end{aligned}
$$

- x, y, z 方向にそれぞれ a, b, c の直方体

$$
I_x = \frac{M}{12}(b^2+c^2),\ I_y = \frac{M}{12}(c^2+a^2),\ I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2)
$$

$$
a \geq b \geq c \text{ なら } I_x \leq I_y \leq I_z
$$

たとえば z 方向の棒が xy 平面内に分布しているとして平行軸の定理から

$$
\begin{aligned}
I_z =& \int \left\{0 + M\frac{dxdy}{ab}(x^2+y^2)\right\} = M(\int \frac{dx}{a}x^2 + \int \frac{dy}{b}y^2) \\
=& M(\int_0^{a/2} x^2 dx / \int_0^{a/2} dx + \int_0^{b/2} y^2 dy / \int_0^{b/2} dy) = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

3.4 剛体の運動エネルギー

剛体の運動エネルギー T を考えてみましょう、まず各点の速度は剛体上の座標系からみて $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \omega \times \boldsymbol{r}$ となりますから

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum m(\boldsymbol{V} + \omega \times \boldsymbol{r})^2 \\
=& \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \sum m\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\sum m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2
\end{aligned}
$$

この第 2 項は

$$\sum m\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \sum m\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega}) = (\sum m\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega}) = 0$$

ここで原点が重心であることを用いました。また最後の項は

$$\begin{aligned}
T_R \equiv&\frac{1}{2}\sum m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\\
=&\frac{1}{2}\sum m\epsilon_{ijk}\omega_j r_k\epsilon_{imn}\omega_m r_n\\
=&\frac{1}{2}\sum m(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})\omega_j r_k\omega_m r_n\\
=&\frac{1}{2}\sum m(\omega_j r_k\omega_j r_k-\omega_j r_k\omega_k r_j)\\
=&\omega_i\frac{1}{2}(\delta_{ij}r_k r_k-r_i r_j)\omega_j\\
=&\omega_i\frac{I_{ij}}{2}\omega_j
\end{aligned}$$

となります。

以上まとめて

剛体の運動エネルギー

$$\begin{aligned}
T =&T_V+T_R\\
T_V =&\frac{1}{2}MV^2\\
T_R =&\frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j
\end{aligned}$$

ここで T_V は重心の並進の運動エネルギー、T_R は剛体としての回転の運動エネルギーと理解できます。

座標変換に対して回転のエネルギーは

$$\begin{aligned}
T'_R =&\frac{1}{2}I_{i'j'}\omega'_{i'}\omega'_{j'} = \frac{1}{2}T_{i'i}T_{j'j}I_{ij}T_{i'k}\omega_k T_{j'\ell}\omega_\ell\\
=&\frac{1}{2}(T_{i'i}T_{i'k})(T_{j'j}T_{j'\ell})I_{ij}\omega_k\omega_\ell\\
=&\frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{j\ell}I_{ij}\omega_k\omega_\ell\\
=&\frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j = T_R
\end{aligned}$$

と不変となります（スカラー）。特に慣性主軸を座標軸とすれば

$$T_R = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

となります。

3.5 剛体の運動方程式

3.5.1 オイラーの方程式

剛体はその重心の位置と剛体の向き、すなわち剛体上の座標系を定まります。ここで、ある慣性系をとってこれらを確定することを考えてみましょう。まず、重心ベクトルは 3 成分を持ちます。つぎに剛体上の座標系をつくる 3 個のベクトルを指定しなければなりませんが、それは慣性系上の座標系と剛体上の座標系の関係を指定する回転行列 T により定まることとなります。これは実の 3×3 行列 T により指定されますが、これは直交行列の関係式 $T\widetilde{T} = E_3$ を満たします。これは対称行列間の関係式ですので、対角要素 3 つと非対角要素 $(3 \cdot 3 - 3)/2 = 3$ だけが独立な関係式を与えますので、$3 \cdot 3 = 9$ 個のうち $9 - (3 + 3) = 3$ だけが独立となります。以上の考察により重心を指定するのに 3 自由度, 向きを一意的に指定するのに 3 自由度の 6 つの自由度を指定することにより剛体を確定することができます。これを剛体の自由度は 6 であると表現します。

ここで質点系の運動の議論を思い出して、質点系に対する全運動量 $\boldsymbol{P}$ と全角運動量 $\boldsymbol{L}$ に対する運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}$$
$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

が剛体の 6 つの自由度を定める方程式となります。

ここで $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}$ は剛体に働く合力、と力のモーメントの和です。

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$
$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i.$$

この第一式は重心 $\boldsymbol{R}$ を用いて以下のようにかけることはすでに説明しました。

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

次に角運動量の変化を定める第 2 式を考えてみましょう。これは慣性系に対する関係式であったことを思い出して、これを剛体上の座標系に関して書き直してみましょう。前に導いた慣性系と回転座標系でのベクトル量の微分に関する一般の関係式から慣性系での微分を明示的に示して、次のようになります。

$$\left.\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right|_{\text{慣性系}} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}$$

となります。よって剛体上の座標系で角運動量 $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$ が満たす関係式はつぎのようになります。

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{N}$$

特に座標軸を慣性主軸にとれば (暗黙には和をとらない規則で)

$$I_i\dot{\omega}_i + \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\omega_j I_k \omega_k = N_i$$

となります。これを明示的に書き下しておきましょう。これをオイラーの方程式と呼びます。

剛体の回転に関するオイラーの方程式

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3$$

対称コマの自由運動

ここで対称コマ $I_1 = I_2 = I$ が力のモーメントを受けずに（自由運動）運動するときを考えてみましょう。このとき $\Delta I = I_3 - I_1 = I_3 - I_2$ としてオイラーの方程式は

$$I\dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3\delta I$$
$$I\dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1\delta I$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

これから $\omega_3 = \omega_0 =$ 一定 となりますから、$z = \omega_1 + i\omega_2$ として

$$I\dot{z} = i\omega_0\delta I z$$

より z_0 を初期条件から定まる複素定数として

$$
\begin{aligned}
z =& z_0 e^{it\omega_0 \delta I/I} \\
\omega_1 =& \mathrm{Re}\, z \\
\omega_2 =& \mathrm{Im}\, z
\end{aligned}
$$

とかけます。これから $\omega_1^2 + \omega_2^2 =$ 一定となります。こまは ω_3 の周りに歳差運動することとなります。

3.5.2 慣性楕円体と Poinsot の表現

剛体に働く力のモーメントがゼロの場合をこの節では考えましょう。このとき

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) =& 0 \\
I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) =& 0 \\
I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_3) =& 0
\end{aligned}
$$

ですから、それぞれ $\omega_{1,2,3}$ をかけて加えると

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{dT_R}{dt} = 0
$$

$$
T_R = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \text{一定}
$$

となりますが、これは回転の運動エネルギー T_R が保存することを意味します。次に、それぞれ $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3$ をかけて加えると

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2) = 0
$$

$$
L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = \text{一定}
$$

となりますが、これは角運動量の 2 乗 L^2 が保存することを意味します。

ここで慣性楕円体 (X, Y, Z) は次の方程式で定まることを思い出しましょう。

$$
I_1X^2 + I_2Y^2 + I_3Z^3 = 1
$$

この慣性楕円体は剛体に固定した慣性主軸を座標系として表現されていることに注意しましょう。つまり、瞬間的には $\boldsymbol{\omega}$ 方向まわりに角速度 $|\omega|$ で回転しています。

ここでまず、点 P= $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)/\sqrt{2T_R}$ は慣性楕円体上にあることに注意しましょう。

$$I_1\frac{\omega_1^2}{2T_R} + I_2\frac{\omega_2^2}{2T_R} + I_3\frac{\omega_3^2}{2T_R} = 1$$

さらに点 P での接平面 π は

$$\pi : I_1\omega_1 X + I_2\omega_2 Y + I_3\omega_2 Z = \sqrt{2T_R}$$

となります。これは P がその上にあることは代入してわかりますし、接平面内のベクトル $(\delta Y, \delta Y, \delta Y)$ が

$$I_1X_1\delta X + I_2Y\delta Y + I_3Z\delta Z = 0$$

を満たすことより $(X, Y, Z))$ での π の法線ベクトルは (I_1X, I_2Y, I_3Z) となることによります。

つまり P での π の法線は $\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ となります。

$$\pi \perp \boldsymbol{L}$$

さらに原点から π へ下ろした垂線の長さ h は、単位法線ベクトルが $\boldsymbol{L}/L = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)/L$ であることから垂線の足を $h\boldsymbol{L}/L$ として

$$I_1\omega_1(h\frac{I_1\omega_1}{L}) + I_2\omega_2(h\frac{I_2\omega_2}{L}) + I_3\omega_3(h\frac{I_3\omega_3}{L}) = \sqrt{2T_R}$$

より

$$h = \frac{\sqrt{2T_R}}{L}$$

と一定となります。法線と原点からの垂線の足が一定ですからこの平面 π は　固定されていることとなります。これを不変面と呼びます。剛体に固定された慣性楕円体はこの平面に接しながら原点から接点に向かうベクトルを回転ベクトルとしながら運動することとなります。このような剛体の回転の表現法を poinsot の表現といいます。

さらに接点が慣性楕円体上に描く曲線を ポールホード (polehode)、不変面上に描く曲線をハーポールホード (herpolhode) と呼びます。つまりポールホードはハーポールホード上を滑らないで転がることとなります。原点と接点が作る直線が剛体上に作る錐面をポールホード錐、空間につくる錐面をハーポールホード錐と呼びます。