— 統計物理学 2013 年度試験— 2014. 2.5 (10:10—11:25) 初貝

解答に必要な記号、物理量などは適宜定義せよ。

I. 統計力学の基礎的事項について以下の記述の A-J の空白をうめよ。

エネルギー E で指定される統計集団を $\boxed{\text{A}}$ 集団という。このエネルギー状態が W 重に縮退度しているとき，それを $|n\rangle$ $(n=1,\cdots,W)$ と書こう。これらの状態は $\boxed{\text{B}}$ である時、規格直交化されているといい、$\boxed{\text{C}}$ $=E_W$ である時、完全である。なお E_W は W 次元の単位行列である。ここで系の $\boxed{\text{A}}$ 集団の密度行列を $\rho(E)=\sum_{n=1}^{W}|n\rangle\rho_n\langle n|$ と書けば、物理量 $\mathcal{O}$ の統計平均 $\langle\mathcal{O}\rangle$ は密度行列 ρ を用いて $\langle\mathcal{O}\rangle=$ $\boxed{\text{D}}$ となる。ここで、$\boxed{\text{E}}$ の原理とは $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_W$ となることを主張する。なお $\mathrm{Tr}\rho=$ $\boxed{\text{F}}$ である。よって $\rho_n=$ $\boxed{\text{G}}$ となる。ここで $\boxed{\text{A}}$ 集団の $\boxed{\text{H}}$ を $S=-\langle\log\rho\rangle$ とすれば $\boxed{\text{E}}$ の原理により、具体的に計算して $S=$ $\boxed{\text{I}}$ となる。

なお $\boxed{\text{E}}$ の原理は変分原理としては $\boxed{\text{J}}$ と呼ばれる λ を導入することで $\delta(S-\lambda\mathrm{Tr}\rho)=0$ からも導かれる。

III. (1) モーメント μ の独立な N 個の $S=1/2$ のスピンが z 方向の磁場 B の下にあるときのハミルトニアンは $H_N^0=-\mu B\sum_{i=1}^{N}S_i^z$ となる。

i. この系をカノニカル集団として扱い、温度 T の時の分配関数 Z を求めよ。ただし $\beta=1/k_BT$ とせよ。(k_B は Boltzmann 定数)

ii. スピン当たりの磁化 $m=\dfrac{\mu}{N}\sum_{i=1}^{N}S_i^z$ と分配関数の磁場に関する対数微分との関係式を導け。

iii. m を求めよ。

iv. 協力現象とは何か。また、この系で協力現象は生じるか否か理由とともに述べよ。

(2) 強磁性的に相互作用するスピン 1/2 の 1 次元系を周期的境界条件の下で考えよう。系のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}S_i^zS_{i+1}^z,\ S_{N+1}^z=S_1^z$$

i. 相互作用 J は正か負か理由とともに述べよ。

ii. S_i^z の統計平均が i に依存しないとして $\langle S_i^z\rangle=m/\mu$ とし i 番目のスピンの揺らぎを $\delta S_i^z=S_i^z-\langle S_i^z\rangle$ とする。S_i^z,S_{i+1}^z を δS_i^z, δS_{i+1}^z で

書き、揺らぎの2次の項を無視し $H \approx H_M = -\mu B_e \sum_{i=1}^{N} S_i^z$ と書く。B_e を求めよ。

iii. m の満たす方程式を導け。

iv. 前問の方程式は十分低温では $m \neq 0$ の解を持つことを示せ。

III. Ising 模型をランダウ理論により議論する。ただし、スピンあたりの自由エネルギーは磁化 m の関数として $f(m)$ である。

(1) 2次の相転移とは何か

(2) T_C で2次の相転移がおきるとき、$T > T_C$ ならびに $T < T_C$ での $f(m)$ の概形をそれぞれ描け。

(3) 1次の相転移とは何か

(4) T_C で1次の相転移がおきるとき、$T > T_C$ ならびに $T < T_C$ での $f(m)$ の概形をそれぞれ描け。

IV. 時刻 t に座標 $x(t)$ にある質量 m の質点が速度 $v = \dot{x}$ に比例する抵抗力 $-\gamma v$ と外力 $F(t)$ をうけて運動する粒子の運動方程式は $\left(m\frac{d}{dt}+\gamma\right)v = F$ となる。

(1) $F(t) = \delta(t)$ の時の速度を $\chi(t)$ として、これを求めよ。ただし $\chi(-\infty) = 0$ とせよ。

(2) 一般の外力 $F(t)$ に対して $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \chi(t-\tau)F(\tau)$ と書いたとき、これが運動方程式を満たすことを示せ。

(3) 具体的に $\chi(t)$ を代入し、前問の解が初期条件 $v(-\infty) = 0$ を満たすことを示すとともに、因果律について説明せよ。

(4) 一般に $F(t)$ がランダムな場合の運動方程式はランジュバン方程式と呼ばれる。さらに外力がホワイトノイズと見なせる場合、ある定数 D を用いて, $\langle [x(t)]^2 \rangle \approx 2Dt$ となる。この結果を等速直線運動と比較し物理的に説明せよ。

(5) 前問の運動はブラウン運動とよばれるが、その具体的な例を挙げよ。