— 統計物理学 2011 年度試験— 2012. 3.7 (10:10—11:25) 初貝

解答に必要な記号、物理量などは適宜定義せよ。

I. 統計力学の基礎的事項について解答せよ。

ハミルトニアンを H としたとき、カノニカル集団の分配関数は $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ である。なお、k_B は $\boxed{\text{ A }}$ 定数。T は温度, $\beta = \boxed{\text{ B }}$ である。また $\boxed{\text{ C }}$ の自由エネルギー F は $Z = e^{-\beta F}$ である。このとき、密度行列 ρ は $\boxed{\text{ D }}$ であり，物理量 A の統計平均 $\langle A\rangle = Z^{-1}\mathrm{Tr}\, Ae^{-\beta H}$ は, 密度行列を用いて $\boxed{\text{ E }}$ と表せる。

なお任意の物理量（エルミート演算子) X に対して、$\mathrm{Tr}X = \sum_n \langle n|X|n\rangle$ である。ここで、規格直交化された基底 $|n\rangle$, $n = 1, 2, \cdots$ は $\langle n|m\rangle = \boxed{\text{ F }}$ を満たし、完全性の条件は $\sum_n |n\rangle\langle n| = \boxed{\text{ G }}$ と書ける。

(1) 上の記述の A-G の空白をうめよ。

(2) 任意の演算子 A, B に対して $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ であることを示せ。

(3) 分配関数を β の関数とみて，β で微分すれば，$\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = -\mathrm{Tr}He^{-\beta H}$ である。これを用いて、エネルギー $E = \langle H\rangle$ を $\dfrac{\partial F}{\partial \beta}$ と関係づけよ。

(4) エントロピー $S = -k_B\langle \log \rho\rangle$ として、$F = E - TS$ を導け。

II. 量子理想気体に関する以下の文章中の A-I の空白をうめよ。

量子理想気体の大分配関数は $\Xi = \mathrm{Tr}e^{-\beta(H-\mu N)} = \prod_k \sum_{n_k} e^{-\beta(\epsilon_k-\mu)n_k}$ と書ける。ここで，H, N, μ は、それぞれハミルトニアン、全粒子数、$\boxed{\text{ A }}$ であり，$\boxed{\text{ B }}$ 粒子系に対しては $n_k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ であり、$\boxed{\text{ C }}$ 粒子系に対しては $n_k = \boxed{\text{ D }}$ である。この最後の関係式は，一つの量子状態に複数の粒子は存在できないことを主張する $\boxed{\text{ E }}$ 律を意味する。

また，一粒子状態の占有率 $n(k) = \langle n_k\rangle = -\beta^{-1}\dfrac{\partial \log \Xi}{\partial \epsilon_k}$ は $\boxed{\text{ B }}$ 粒子の場合 $n(k) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)} - 1}$ であり、$\boxed{\text{ B }}$・$\boxed{\text{ F }}$ 分布とよばれ $\boxed{\text{ C }}$ 粒子の場合 $n(k) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)} + 1}$ となり，$\boxed{\text{ C }}$・$\boxed{\text{ G }}$ 分布とよばれる。なお、電子は $\boxed{\text{ H }}$ 統計に従い 光子は $\boxed{\text{ I }}$ 統計に従う。

III. 時刻 t に座標 $x(t)$ にある質量 m の質点が速度 $v=\dot{x}$ に比例する抵抗力 $-\gamma v$ とランダムな外力 $F_R(t)$ をうけて運動するときの運動方程式は $m\dot{v}=-\gamma v+F_R$ であり、ランジュバン方程式と呼ばれる。なおランダム力は $\langle F_R(t)F_R(t')\rangle = M\delta(t-t')$ を満たすとする。ここで、$\langle\cdot\rangle$ はランダム平均を意味する。

(1) 抵抗力が十分に大きく (質量が十分に小さく) $m\dot{v}$ の項が無視できるとして、運動方程式より時刻 t の質点の座標を求めよ。ただし $x(0)=0$ とせよ。

(2) (1) 仮定のもとである定数 D を用いて, $\langle[x(t)]^2\rangle = 2Dt$ となることを示せ。

(3) (2) の結果を等速度直線運動と比べて，運動を物理的に説明せよ。

(4) 温度 T の時，アインシュタインの関係は $D=\dfrac{k_BT}{\gamma}$ となることを主張する。ランダム力は「揺動」であり、抵抗力はエネルギー「散逸」を意味することに注意して，この関係式の物理的な意味を説明せよ。

IV. 協同現象の例として、一次元的にならんだ N 個のスピンが磁場 B 中で、強磁性的に相互作用する系を考えよう。系のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = -J\sum_i S_iS_{i+1} - B\mu\sum_i S_i,\ (S_i=\pm 1/2,\ J>0)$$

(1) 磁場 $B=0$ のとき，エネルギーはどのようなスピン配置 $\{S_i\}$ で最低となるか述べよ。

(2) 相互作用 $J=0$ のときの平均の磁化 $m=\dfrac{\mu}{N}\sum_i\langle S_i\rangle$ が $m=\dfrac{\mu}{2}\tanh\dfrac{\beta\mu B}{2}$ となることを導け。

(3) 隣接するスピンの効果を有効磁場として近似的に取り扱い $\sum_i S_iS_{i+1}\approx \dfrac{2m}{\mu}\sum_i S_i$ と近似しよう。このとき，近似後のハミルトニアンは $H_{MF}=-B_{\mathrm{eff}}\mu\sum_i S_i$ と書ける。B_{eff} をもとめよ。

(4) 以下 (3) の近似の下で考える。m は外部磁場が B_{eff} である場合の磁化であることを用いて m の満たす関係式を書け。

(5) 外部磁場がない場合，すなわち $B=0$ であっても，ある温度以下 $T<T_C$ なら (4) を満たす $m\neq 0$ の解があることを説明し，T_C を求めよ。