量子液体のトポロジカルな特徴づけ

2008 年 10 月

初貝　安弘

筑波大学大学院数理物質科学研究科物理学系

1　はじめに

近年の情報化社会の発展にはまさに驚くものがあります。いわゆるインターネット社会の象徴でもある WWW (World Wide Web) よる情報の発信も 1990 年代初頭に Mosaic そして Netscape なる Web ブラウザーが出た当初には、小学生が宿題をネットで検索して調べるような現在の時代は簡単には想像できませんでした。いうまでもありませんが、この情報化社会はその物質的基礎を半導体等の微細加工に基づく集積回路に置きます。すべての情報操作はビット演算として半導体等の物理的な状態の変化に対応することは、いわば当たり前のことですが、日本そして世界の社会全体をみたとき、こんな当たり前のことを概念としてすら理解している人々の割合はそれほど高くないだろうと思います。いまでは、小学校でもパソコンの使い方は教えるでしょうが、その基板が材料科学、物理科学であるとは小学生は全く教えられていないでしょうし、もしかするとそれを指導する教員の理解すらかなり怪しいところがあります。このようなブラックボックス化した知識は文明の没落を意味します。すべての人々が完全な知識を持つことはもちろん不可能でしょう。しかし、パソコン上で今送ったメールが友達の携帯に届くことが豆電球を電池につないでみる実験と基本的には共通の物理的原理に基づくことぐらいは完全に理解しておくことが、多少なりとも知識人を称する人々の最低限の必要条件であるとおもいます。

私が学生のころはメールなりある種のチャット (Unix 上の talk) で日本とヨーロッパの間文字ベースの情報交換がほぼ実時間でできることに驚きを感じるような時代でありましたが（大学の計算機センターにあるスーパーコンピュータのメモリーは 8MB だったとおもいます。）いまでは、静止画でしたらほぼ実時間での海外の交換が普通に行える程度となりました。またパソコンのハードディスクの容量はあっという間に MB 単位から GB 単位になったことも記憶に新しいところです。このような限りない情報量への欲求に対応して高速化する CPU 速度、大容量化するメモリーを物質的に実現することは基本的にはその集積度を上げることにて行われてきたわけですが、当然のことですが、そこには明らかな限界があります。現在もしくは近い将来に必ず問題となり得るもしくはなりつつあるのが量子論の壁です。必ずしも壁という表現が適切ではないかもしれませんが、「電気が流れる」、「電子がこのゲートからこちらへ移動する」、「電流を測定器で計測する」というような概念自体が必ずしも正確な表現でなくなるのが量子効果であり、量子効果が系を支配する主たる要因となるときこれらのすべての表現は無意味となります。

2 古典論から量子論へ

古典論と量子論とはお互い相反する物理的理論ではありません。いわゆるニュートン力学が古典論の代表的なものですが、ニュートン力学が量子論により否定されたわけではありません。量子論とは古典論を含む形の理論的枠組みであり、それぞれに適切な適用範囲があるに過ぎません。野球のボールの運動はニュートン力学で完全に記述されます。そこに量子論の入る余地は全くありませんし、量子論はピッチャーの投げるボールの運動に対しては全く無力です。しかし野球のボールの運動も量子論の拘束から逃れることはできません。

この量子論はプランク定数と呼ばれるただ一つの定数で特徴づけられます。プランク定数によって古典論は量子論に徐々にぼんやりと包含されるのです。 正確には古典論から量子論にクロスオーバーするといいます。 理科年表によるとプランク定数は $\hbar$=6,626.. $\times 10^{-34}$[J・s] となっていますが、普通の感覚ではこれはとても小さいと思われます。$\hbar$ が唯一の量子論の定数というわけですから、あまりにも小さなこのプランク定数は無視してもよいでしょう。これが、量子論から古典論にクロスオーバーすることの意味です。普通の感覚とはあまりにも曖昧ですが、少し丁寧に考えるとつぎのようになります。 [m] は長さ、[s] は時間ですが、それをかけ算した物理量は作用と呼ばれます。よく知られているように 1[kg] のもの 1[m] 持ち上げるときに必要なエネルギーは約 10[J] ですから、日常生活に現れるエネルギーはおよそ [J] 単位ではかればよいわけです。また、通常の生活の時間は秒単位で計ればよいでしょうから、私たちの生活における作用は、これを S と書いたとき S=1000[J・s]〜0.001[J・s] 程度とみてもよろしいとおもいます。あまりにも小さいというのは $S >> \hbar$ という意味です。逆に言えば、考えている物理現象の作用がプランク定数と同程度になったときには古典的な物理法則は修正を受けなければならないのです。微細加工技術がこのまま、進歩し、デバイスの動作時間が短くなり、その動作に必要なエネルギーも小さくなり、その結果デバイス動作に必要な作用の大きさ、つまり考えている物理現象の典型的なエネルギーの大きさと典型的な時間スケールの積が $\hbar$ 程度となったときには、古典的な物理法則は完全に破綻し、全く異なる量子論的な記述、考え方が必須となります。これが量子論の壁です。現在の微細化の速度、集積度を考えたとき、この量子化の壁も決して想像上のものでなく、十分心してかかる必要がある程度の範囲にあるわけです。

3 材料科学と物質相、対称性の破れ

物理現象を電子デバイスその他の機能素子に用いる際の物質的基礎は材料科学ですが、その基礎的物性を定めるそれぞれの材料、物質の形態を物理的には物質相と広く呼びます。液体、固体、磁性体、誘電体といろいろな物質の中に、これまた多様な物質相を実現し、その特性を利用することで、機能性あるデバイス等を実現します。これが現在の文明の基礎をつくる材料科学の物理的観点からの姿です。

磁性体、誘電体と述べましたが、例えば磁性体にもいろいろあります。強磁性体、反強磁性体、ヘリカル磁性体等々というわけです。これらの磁性体は「相」が異なるといわれますが、その相を特定しているものが「秩序変数」とよばれる物理量です。ここでの磁

性相の場合、局所的な平均磁化がその秩序変数となります。具体的にはある原子サイトにおける磁気モーメントつまり微少な磁石の向きの平均値をもって秩序変数とします。温度が高ければ熱揺らぎで各原子の磁化はいろいろな方向を向いていますから平均的にはある場所での磁化はゼロとなります。つまり秩序変数の値はゼロとなります。これを高温相では系は熱揺らぎで乱れた相にあるといいます。次にこの高温相から少しずつ温度を下げていくことを考えて見ましょう。だんだんと熱揺らぎが減っていきますから、原子サイトの磁化をつくる電子が近くの原子サイト間を移動することで近くの磁化同士が影響を与えあうようになります（これを交換相互作用といいます）。その結果十分温度がさがって近くの磁化間の相互作用が熱揺らぎに打ち勝つようになると磁化の特定の空間パターンができてくるようになります。磁化のパターンにはいろいろなタイプがあるわけですが、そのパターンでもって磁気的な相を区別するのです。例えば、すべての磁化が特定の方向を向くとき、系は強磁性相にあると呼び、隣同士の原子上の磁化が逆向きに並ぶとき、系は反強磁性相にあるとよばれます。ある場所での平均的な磁化の向きが秩序変数でしたから、このように低温で、温度揺らぎが減少しパターンができることは、秩序変数によりあらわされることとなります。温度を下げることで、このように秩序変数がゼロから有限の値になることを持って、物質相の温度変化が特徴づけられたわけです。つまり磁気的な相が秩序変数により特徴づけられその値の変化 (ゼロから有限) によってこの相の変化（相転移といいます）が特徴づけられた訳です。

局所的相互作用により全体が秩序化するというのは、小学生が体育館で整列するとき、局所的な相互作用である各自が前の子供の真後ろに並ぼうとすることで全体がまっすぐに整列する（秩序化する）のと基本的には同じことです。低温相における、このようなパターン形成、秩序形成は物質中にそのパターンを好むもの、例えば外からの磁場等が働いていれば、自然に理解できます。ところが実際は、そのような外的要因が全くなくとも磁化間に相互作用さえあれば、磁化間の相互作用により自発的に特定のパターンと方向がえらばれ秩序形成がおこることが知られています。これは「自発的対称性の破れ」と呼ばれ、相の物理的な特定のための現代の物理学における基本的な概念と考えられています。磁化の例の場合を考えると原子上で特定の向きはありませんから、すべての方向は同等なはずですが、この自発的対称性の破れにより磁化が完全にそろってしまう方向もしくは、上下上下と向いてしまう方向という特定の方向が自発的に生まれてしまう訳です。これを低温相において「対称性が自発的に破れた」と表現します。

この節では、古典的な物質の相の理論としては秩序変数と、それを用いた対称性の破れが重要であり、それにより古典的な相とそこでの相転移が特徴づけられることを説明しました。

4　量子相と量子相転移

第 2 節で古典論と量子論の関係を説明した上で、第 3 節で古典的な相の理論を概観しましたが、この節では量子論的な相の理論について説明したいと思います。メソスコピック系の物理現象、ナノ物理等いわゆるナノ 10^{-9} オーダーのナノワールドにおける物理現象が現れる物質相を対象とするとき、前に議論しました量子化の壁が見えてくることとなります。また必ずしも物理系の大きさが小さくなくとも、極低温や高いコヒーレンスが保た

れると表現されるような極限的な状況においては、巨視的なスケールでも、量子効果が本質的な現象が現れます。レーザー発振、超伝導、量子ホール効果、などにおいてこの巨視的量子効果が現れる典型的な現象です。このような量子効果が本質的に重要な役割を果たす物質相をまとめて「量子相」と呼びます。この量子相においてはニュートン力学に従う古典的な世界とは少し違って基本的な物理法則が量子力学のものとなりますから、その相での物質の振る舞いも古典的なものとは異なったものとなります。つまり、この量子相を使えば、いままでにない機能性デバイスを作れる潜在的な可能性があるわけです。

量子効果とはエネルギースケールと時間スケールのようにその積が程度になると重要な意義があるといいましたが、このような 2 つの物理量の組を共役な物理量と呼びますが、この組に属する 2 つの物理量は同時には十分な正確さで観測できないことが知られています。これをハイゼンベルグの不確定性と呼びます。この不確定性は量子論における本質的なある種の揺らぎと理解することができます。前節では古典的な世界における熱揺らぎの効果を説明しましたが、量子効果を考えると熱以外にも揺らぎが存在することとなります。熱揺らぎは温度を下げることで減少し、いわゆる絶対零度（約摂氏－ 273 度）で完全に熱揺らぎは消失すると考えられますが、量子論的には絶対零度においてもこの量子ゆらぎは存在します。このため、量子力学的な物質の形態である量子相においては、古典的には、温度を下げることで生じると考えられる秩序形成が強く妨げられ、絶対零度においてすら量子ゆらぎの影響により、どんな秩序も形成されない状況が生まれ得ることとなります。このような量子ゆらぎにより古典的な秩序形成が妨げられた相を、量子的に乱れた相、もしくは、量子液体相とよびます。熱揺らぎと秩序形成が拮抗して相転移がおきたように、なにか物理系のパラメター（例えば電子濃度など）を変化させることにより量子ゆらぎと秩序形成が競合することにより生じる相転移を「量子相転移」と呼びます。量子論の説明の際、量子論固有のパラメターであるプランク定数と同程度の物理量が現れる一つの例として系の大きさを小さくすることによるナノワールドの物理を例としましたが、量子ゆらぎさえ十分発達すれば、マクロな系においても量子効果が主たる相の決定要因となることができます。つまり、系が小さいこと（ナノ）は必ずしも必須の要件ではなく、このような量子相における量子現象をマクロな量子現象と呼びます。例えば、よく知られた金属において極低温においてマクロな系の電気抵抗が完全にゼロとなる超伝導は典型的なマクロな量子現象と考えることができます。超伝導相においては、電子の数という古典的にはどう考えても確定していると思われる物理量がマクロに揺ぐ相として超伝導相が実現します。

例えば、いわゆる高温超伝導体の発見により液体窒素温度における超伝導は簡単に実現できるようになりました。常温超伝導体による電気輸送はまだ容易に実現できそうにはありませんが、科学館レベルでの超伝導はひろくひろまったことは確かです。一昔前には空気も低温では液化することの例として液体窒素でゴムボールを凍らせて割ってみせるというのが科学館でよく行われるデモンストレーションでしたが、今では、マイスナー効果によって磁石が超伝導体の上でくるくる回っているのは子供を科学館に連れて行けば何処でもよく見られる風景となりました。

また、他のマクロな量子現象、量子相の例としましては、2 次元電子系に共磁場をかけたときに実現する量子ホール効果、レーザー冷却等で温度が極限的にさげれれた原子集団で実現した冷却原子のボーズ凝縮相等があります。　量子相はいまや何処にでもあるのです。現在でも超伝導 SQUID(超伝導量子干渉計) は市販されるデバイスとなっていますが、

近い将来、量子計算機が簡単に実現するとまではいわなくとも量子相を用いたデバイスはごく普通のものとなると思われます。

5 量子相の特徴と量子液体

前節で説明した量子相においても普通の特徴的な量子相、例えば、超伝導相、電荷秩序相、反強磁性相などは対称性の破れを伴います。ハミルトニアン、つまり物理系が持っていた対称性をその系で実現する（基底）状態は無限に大きな系では持たないのです。磁性体に関していえば、磁場がないとき磁性体にとって特定の方向はなく、すべての方向は同等なはずですが、磁気秩序相においては磁化が特定の方向を向いていますから、ある特定の方向が自発的に選ばれることとなります。系の対称性を基底状態が破るので、この現象は「自発的対称性の破れ」と呼ばれ、秩序相の分類において本質的に重要な役割を果たします。これが前節で説明したことの要点でした。

この対称性の破れの観点から、量子系の励起に関して考えてみましょう。励起とは十分低温にある量子系に外からエネルギーを注入して状態を変えることを意味します。前の節で、量子論でのハイゼンベルグの不確定性を紹介しましたが、その本質的な部分は、作用と呼ばれる運動量×長さなどに正確に測定できる限界があることでした。このように量子論においてはいろいろな物理量に最小の単位があることが重要です。量子という言葉は、これらの最小単位を意味しています。ところが物理系が連続対称性を破るとき、系の励起には必要な最小単位がなく、どんなに小さなエネルギーでも系の状態をほんの少しだけですが変化させることに対応して異なる状態に遷移させることができるのです。それは対称性の破れた基底状態をほんの少しだけ空間的にゆっくりと変更する（ひねる）ことで実現されます。ゆっくりひねるとはある波長で系に外乱を与えることに対応しますが、その波長をどんどん大きくすれば、局所的には状態はほとんど変更されませんので、必要なエネルギーはどんどん小さくてすむと考えられます。このような励起はその発見者の名前を冠して、ギャップレスの南部-ゴールドストンボゾンと表現されることもあります。　鉄の棒を他の金属棒でたたいたとき、その中を一定の音速で、縦波の音波が広がっていきますが、音速が一定であるということは、波長の長いものは、系のほとんど乱さずに実現できること、すなわち必要なエネルギーが少ないことを意味しますので、対称性の破れた量子系での励起は、この励起はこの音波の類似物と考えられます。（補足ですが、この音波は、量子化することで音響型フォノンと呼ばれます）　まとめますと、特徴的な量子相は、自発的な対称性の破れをともなう基底状態を持ち、そこでの励起エネルギーは音波の類似物としてのギャップレスの励起をもつこととなります。

　これでやっと本題に入ることができます。この小論でご説明したい量子液体とは、ここで説明した系とは全く逆の対称性の破れを持たず、よって南部-ゴールドストンボゾンも存在せず、励起に有限のエネルギーが必要な状態を指します。対称性の破れ、そして秩序の概念で量子相は特徴づけられていましたから、いかなる対称性の破れも持たない、いかなる秩序も持たない相は特徴のない量子相で秩序相に対するとの意味で量子的に乱れた相が量子液体というわけです。氷は、固体で秩序を持った結晶をつくりますが、水はそのような秩序は持たない液体といいますが、その量子論での類似物と考えることができます。この量子液体は、量子揺らぎで秩序が破壊された乱雑な液体状態というわけですが、実は、

単に乱れたわけのわからない状態というわけではなく、また例外的な状態でもなく、広く量子系に存在する、明確に区別できる多様な量子相を含むことが近年の活発な研究によって明らかとされつつあります。これに関して次の節でご説明しましょう。

6　トポロジカル絶縁体としての量子液体

量子液体とは量子ゆらぎにより乱れた相という意味ですが、その相がいかなる秩序も持たないとき、励起に有限のエネルギーが必要となります。つまり、系は自由に動けるキャリアをもたない絶縁体となります。このような量子系は、決して例外的なものではなく、実はきわめて広範囲に存在します。専門的になりすぎますので、説明は省略しますが、幾つか例をあげれば、分数、整数量子ホール系、ダイマ-系、整数スピン鎖、占有率１／２の近藤格子系、スピンホール系などが、その典型的な例です [1, 2, 3, 4]。また単層の炭素原子が六角格子上に無限に並んだ系、ベンゼン環を無限に敷き詰めた２次元のシートは近年実験的に構成することができるようになり、グラフェンと呼ばれますが、その特異な性質から多くの興味を集めていますが、磁場をかけたグラフェンも典型的な量子液体相と考えることができます。

このように特徴がないといいました量子液体にも多様な種類があるわけですが、これらは通常の古典的な相の分類である秩序の概念を用いることではそれぞれの相を特徴づけることはできないわけです。古典的な相転移の理論、そして量子相の理論としてもとてもうまくいっていた、秩序変数を用いて、自発的対称性の破れの概念を使った理論が、ここでの量子液体相の分類においては全く無力となるのです。このような量子液体に対しては、少し考え方を変えて、量子力学的な幾何学的位相と呼ばれる新しい概念を持ち込み次に説明するトポロジカルな量を用いることでその多様性をうまく記述できることが最近理解されつつあります。近年これらの量子液体相は、広くトポロジカル絶縁体と呼ばれるようになりました。

7　トポロジカル絶縁体でのトポロジカルな秩序変数 [5, 7]

トポロジカル絶縁体を特徴づけるトポロジカルな秩序変数としては、いわゆる幾何学的位相を用いますが、そのとき基本的な役割を果たすものがベリー接続と呼ばれる次の量です。

$$A_\mu = \langle\psi|\frac{\partial}{\partial x^\mu}|\psi\rangle \tag{1}$$

ここで $x = (x^1, \cdots, x^M)$ は、量子系の M 個のパラメターで, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ はそれらについての偏微分、$|\psi(x)\rangle$ は,　パラメター x 依存のハミルトニアン $H(x)$ のエネルギー $E(x)$ の固有状態です。

$$H(x)|\psi(x)\rangle = E(x)|\psi(x)\rangle \tag{2}$$

このパラメターのあつまり x としては量子液体それぞれに対していろいろなものをとることが考えられますが、例えば、不純物近傍を貫く磁束、系の境界条件他が考えられます。

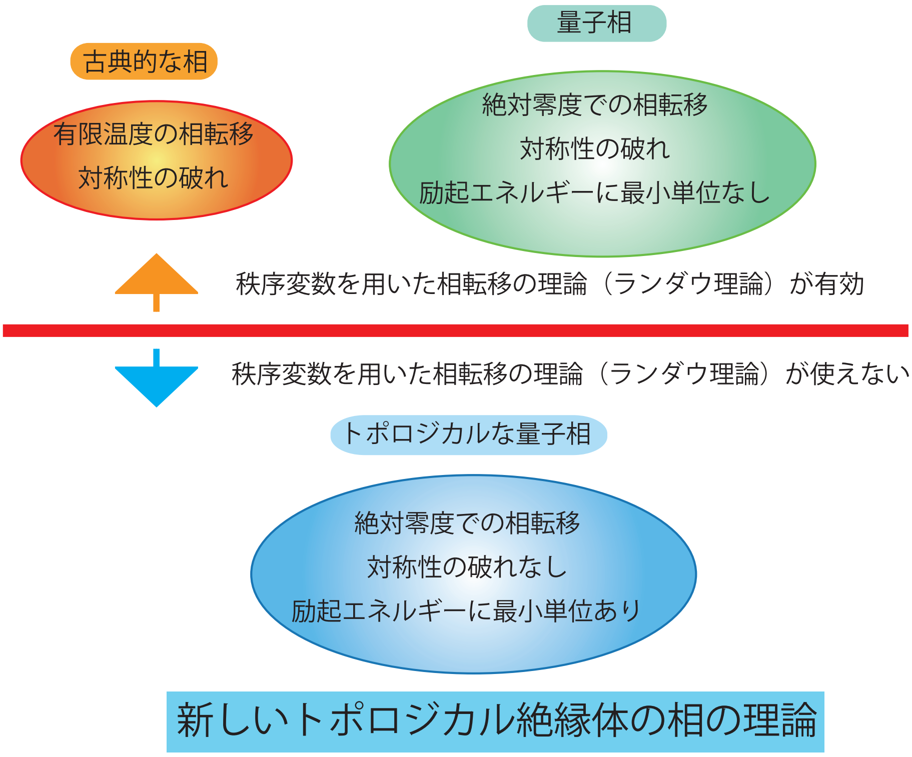

図 1: いろいろな物質相

普通の相転移の理論において何を秩序変数とするかは、一般論が答えるべき問題ではなく、ここの例に対して各論としてそれぞれの工夫が必要であることと同じように、量子相の分類についても、このパラメタとしてなにをとるかにはここの工夫が必要となります。ここではスペースもないので一般論の概略のみをご説明したいと思います。

ここで固有値問題は, 個々のパラメター x ごとにハミルトニアンを対角化することで実行されますから、異なる x の間での固有値問題は完全に独立となります。さらにこの固有値問題は斉次の方程式 (2) の解ですからたとえ規格化の条件

$$\langle\psi(x)|\psi(x)\rangle = 1$$

を要求したとしてもその位相の分だけ不定となります。つまり $|\psi\rangle$ の代わりに θ を実数として

$$|\psi\rangle' = |\psi\rangle e^{i\theta}$$

をとってもよいわけです。なおこの位相の変換によってもいわゆるオブザーバブルと呼ばれるエルミート演算子 $\mathcal{O}$ の期待値は当然変わりません。

$$\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}|\psi'\rangle$$

これは古典的な物理量はこの位相変換で不変であることを意味します。

この位相 $\theta = \theta(x)$ もパラメター依存でまったくかまいませんし、各パラメタごとに勝手に不連続にとることすらできます。というわけで各点ごとの固有関数 $|\psi\rangle$ の位相は全く任意となります。任意で全く定まっていませんから当然微分することなどできるわけもなく、 式 (1) の微分はそのままでは一般には定義されていないこととなります。

一方でこの位相の自由度をうまく使うと問題なく微分できるような滑らかな固有関数を紛れなく一意的に作ることもできます。この作り方は後で説明したいと思いますので、しばらくは、そのような滑らかな固有関数があるとして進みたいと思います。このとき $|\psi\rangle'$ も滑らかとしますと θ も滑らかな関数と思えます。このとき微分の公式から

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}|\psi\rangle' = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}|\psi\rangle\right)e^{i\theta} + i|\psi\rangle\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}\right)e^{i\theta}$$

となりますから異なる位相を用いた $'$ 系でのベリー接続 $A'_\mu = \psi'|\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi|\rangle'$ は次のようになります。

$$A'_\mu = A_\mu + i\frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}$$

これは電磁気学で学ぶベクトルポテンシャルのいわゆるゲージ変換による変換則と同じですから、ここで考えたパラメター各点ごとの位相変換もゲージ変換と呼ぶことにしましょう。滑らかな固有関数の決め方ができれば、位相変換により各点ごとの A_μ は、全く勝手に変更されてしまうのではなく、このゲージ変換の自由度をのぞけば確定されることとなります。この意味で異なるパラメターの 2 点、特に無限小だけパラメター空間で離れた点の間の固有関数の間の関係を A_μ は規定していると思えますので、「接続」と呼ばれます。このゲージ変換は M.Berry により初めて明確に意識されたものです。

そこで何でもよいのですが、あるパラメター空間の閉曲線 C をとってその上での A_μ の線積分を次のように定義します。

$$i\gamma(C) = \oint A_\mu dx^\mu$$

ここで定義された γ はベリー位相と呼ばれますが、これを用いるとトポロジカル絶縁体はいろいろと分類されることとなります。一つ注意しなければならないことは A_μ はゲージ依存量ですから、ベリー位相 γ もゲージに依存して、ことなる位相をとれば

$$\gamma' = \gamma + \Delta$$
$$\Delta = \oint \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}dx^\mu$$

とベリー位相は Δ だけ変更を受けることとなります。つまりベリー位相は一意には確定しないこととなります。ただし、θ は位相でしたから $e^{i\theta(x)}$ がパラメター空間閉曲線上で一価関数として定まっていれば、

$$\Delta = 2\pi \times \text{整数}$$

となりますから、2π の整数倍の不定性に目をつぶればベリー位相は一意に確定することとなります。つまりベリー位相の不定性は不連続であることを意味していて、これがベリー

位相にはトポロジカルな意味があるといわれる理由です。少し専門的になりますが、小さなゲージ変換に対してはベリー位相はトポロジカルな安定性をもちますが、大きなゲージ変換に関しては 2π の整数倍の変更をうけると表現されます。

この量は位相変換つまりゲージ変換に対して Δ だけ変更を受け、不変ではないですから、古典的な物理量（オブザーバブル) ではありません。つまり真に量子論的な物理量であるといえます。この真に量子論的な量を用いることでトポロジカル絶縁体の相分類が可能となるのです。

最後に先ほど保留したパラメター空間上で滑らかな波動関数の作り方を手短に説明しましょう。まず、固有関数 $|\psi\rangle$ はその位相が定まらない（ゲージ依存量）ですが、その固有空間への射影演算子

$$P = |\psi\rangle\langle\psi|$$

は位相によらないゲージ不変量です。つまり、これはパラメター空間で一意的に確定された物理量となります。これを用いて、任意に固定した任意の状態 $|\phi\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} |\psi_\phi\rangle =& P|\phi\rangle/\sqrt{N_\phi} \\ N_\phi =& \langle\phi|P|\phi\rangle \end{aligned}$$

としますと $|\psi_\phi\rangle$ はパラメター空間で一意的かつ、一般には、滑らかな固有関数となります。ただしそのためには $N_\phi \neq 0$ の条件が割り算していますので、必要となります。任意の関数 $|\phi\rangle$ を連続的に変化させたとき、閉曲線上で $N_\phi = 0$ となることがあり得ますが、その前後の波動関数をつなぐゲージ変換は大きなゲージ変換をつくり $N_\phi \neq 0$ のまま連続変形できる ϕ からつくった波動関数同士をつなぐゲージ変換は小さなゲージ変換とよばれます。

以上少し細かくなりましたが、ベリー位相について概説しました。量子液体相はこのベリー位相などのトポロジカルな新しい物理量を用いることで初めてうまく特徴づけることができます。

8 量子液体におけるバルクエッジ対応 [4]

6 節でトポロジカル絶縁体を紹介して、その相の分類、特徴づけのために幾何学的位相を用いることをお話ししました。そしてその幾何学的位相の典型例というべきベリー位相について 7 節で簡単にご紹介致しました。

量子液体相と呼ばれる新しい物質相は真に量子的な相であり、それ故、古典的には考えられなかったような新しい機能をもつ量子デバイスをこの量子液体相をもちいれば作り出せる可能性があります。この量子液体相を特徴づける幾何学的位相はベリー位相の例でわかるように、必ずしも古典的なオブザーバブルとはなりませんので、その観測には量子干渉効果が必要となることもあります。もちろんそれは量子論の範囲内では観測可能量ですので、実験室で観測できるはずですし、実際の機能も実現できるはずです。ただこの量子干渉効果は必ずしも観測することが簡単とは限らず、場合によっては近年話題の量子計算素子の実現と同等の困難がある場合もあります。もちろんレーザーは今や何処にでもあっ

て、超伝導 SQUID も市販されている時代ですの、近いうちに物質中の量子効果をそのまま制御できる日も近いのかもしれません。

ここでご説明した幾何学的位相の効果は必ずしもこのような量子干渉効果を直接観測することを要求するわけではありません。通常の観測量（オブザーバブル）として観測される幾何学位相もあり、ゲージ不変量であるホール伝導度等がその典型例です。その意味で量子ホール相は観測される量子化されたホール伝導度そのものがトポロジカル絶縁体である量子ホール相を特徴づけたわかりやすい例です。実際、量子ホール相を用いた機能デバイスも現在幾つか存在しています。またトポロジカル絶縁体においては「バルクーエッジ対応」と呼ぶ一般的な原理により、バルク、つまり無限に大きな系においてはいかなる対称性の破れもなく、励起に有限のエネルギーが必要な全く特徴の無い系であるのですが、物理系に境界が存在したり、不純物が存在したりしたときその近傍にバルクにはなかった特徴的な性質並びに低エネルギーの励起状態があらわれることが知られています [8, 4]。実験的には物質相に不純物を導入したり、幾何学的形状として端が重要となる構造を作る等の工夫をすれば容易に観測されるはずです [8]。バルク、エッジに限らず、量子液体相には古典的には考えられない新しい概念による新しい機能を発揮しうる潜在的かつ大きな可能性が秘められています。将来的にはこれらを用いた量子デバイスが現れ、人々の生活に還元されることを期待して、この小論の結びとしたいと思います。

参考文献

[1] M. König *et al.*: Science **318** (2007) 766.

[2] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005), ibid **95**, 146802 (2005).

[3] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 405.

[4] Y. Hatsugai, Phys Rev. Lett. **71** (1993) 3697.

[5] Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, (2005) 1374.

[6] Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. **73**, (2004) 2604.

[7] Y. Hatsugai, J. Phys. Soc. Jpn. **75**, (2006) 123601.

[8] 非接触型多ビット量子状態制御方法及び量子状態制御装置、特開 2004-200259、初貝安弘、科学技術振興機構（出願人）.