— 力学 A:演習問題 3 — 2012 年度 1 学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

I. 3 次元のポテンシャル力について具体的に考えてみよう。$\vec{r} = {}^t(x, y, z)$ とする。

I.1 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に関して $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ であることを確認せよ。

I.2 $\dfrac{\partial}{\partial x} r^{-1} = -r^{-2} \dfrac{\partial r}{\partial x}$ であることに注意して

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} V(\vec{r}) &= -\mu \frac{1}{r^2} \hat{r} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \\ V(\vec{r}) &= -\frac{\mu}{r} \end{aligned}$$

を示せ。(μ は定数。)

I.3 次のポテンシャルに対応する力を求めよ。($\vec{a}$ は定数ベクトル。)

$$V(\vec{r}) = -\frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{a}|}$$

I.4 I.3 の $V(\vec{r})$ をポテンシャルとするような力はどんなものか、幾つか述べよ。

I.5 $V_n(\vec{r}) = \mu r^n$,（n は整数）で与えられるポテンシャルに対応する力を求めよ。$n = 2$ の場合どんな運動か述べよ。

I.6 次のポテンシャルに対する力を求め, 物理的にはどんな状況か説明せよ。($\vec{\lambda}$ は定数ベクトル。)

$$V(\vec{r}) = \vec{\lambda} \cdot \vec{r}$$

I.7 一般のポテンシャル $V(\vec{r})$ の中の質点の運動を考えるとき、系の全力学的エネルギーを E としよう。このとき、どんな初期条件の運動を考えても、$\vec{r}$ の領域 $R = \{\vec{r} | E - V(\vec{r}) < 0\}$ の領域には質点は決して立ち入らないことを示せ。

II. II.1 物理学で重要なオーダーについて考えよう。$x \to 0$ のとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{A}{x} = 0 \text{ なら } A = o(x),\ \lim_{x\to 0}\frac{A}{x} = \text{定数 なら } A = \mathcal{O}(x) \text{ と書く。}$$

n が自然数のとき 2 項定理から以下を示せ。

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) = 1 + nx + \mathcal{O}(x^2)$$

II.2 $f(x,y,z)$ に対して以下の関係式を説明せよ。また $f(x,y,z) = (x+y+z)^3$ について具体的にこれを確認せよ。

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + o(\delta x, \delta y, \delta z)$$

II.3 2 つの独立変数 X, Y の値が定まると f の値が一意に定まるとき f を 2 変数関数と呼び、 $f = f(X,Y)$ と書く。$X,\ Y$ がさらにそれぞれ x, y の 2 変数関数 $X = X(x,y),\ Y = Y(x,y)$ であるとき、f を $f = f(X(x,y), Y(x,y))$ と x, y の 2 変数関数と見なせる。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

となる（チェーンルール)。これを示せ。ヒント:微小量に関する関係式 $\delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\delta X + \frac{\partial f}{\partial Y}\delta Y$, $\delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y$, $\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y$ を順に代入せよ。

II.4 一般に多変数関数 $f(X_i),\ i = 1, \cdots, n$ に関して $X_i = X_i(x_j),\ j = 1, \cdots, m$ であるとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

となることを示せ。また、これは何個の関係式か？(Einstein の記法に慣れよう）

II.5 多変数関数 $f(\vec{r})$ に関して $\vec{r} = \vec{r}(t)$ であるとき III.3 の特別な場合として

$$\frac{df}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

が得られることを確認せよ。

II.6 ポテンシャル力による 3 次元の運動に関して力学的エネルギー保存則を導け。