— 力学 A:演習問題 (5/24) — 2012 年度 1 学期

I. [３次元の質点の力学]

(a) 仕事と運動エネルギーの関係を運動方程式から導け

(b) 運動方程式を運動量を用いてあらわせ

(c) 力積と運動量の関係を導け

(d) 保存力とは何かをのべ、力学的エネルギー保存則を導け

II. [基本的な定数係数線形微分方程式]

1. $x = x(t)$ に関する以下の微分方程式 $\kappa > 0$, x_0 は定数、を考えよう。

$$x' + \kappa x = x_0 t \ (*)$$

(a) まず $x = e^{\lambda t}$ が対応する斉次の微分方程式 $\dot{x} + \kappa x = 0$ を満たすように λ を決め、この微分方程式の一般解が $x = Ae^{-\kappa t}$, (A は定数) となることを示せ。

(b) $x_s = At + B$, （A, B は定数）としてこれが微分方程式 (*) を満たすように A, B を決定せよ。

(c) 今度は, C を t の関数 $C = C(t)$ として $x_s(t) = C(t)e^{-\kappa t}$ が微分方程式 (*) を満たすとき、関数 $C = C(t)$ の満たす関係式を求め、$x_s(t)$ を一つ決めよ。これを定数変化法という。

(d) 一般解をもとめよ。

2. $p(t), q(t)$ を与えられた関数として以下の非斉次の微分方程式を考える。

$$\dot{x} + px = q$$

(a) $q = 0$ の場合 $x = e^{-\int_0^t ds\, p(s)}$ が解であることを確認せよ。

(b) $q = 0$ の場合の一般解を求めよ。

(c) $q \neq 0$ の場合，特解を $x_s(t) = C(t)e^{-\int_0^t ds\, p(s)}$ とおいて $C(t)$ の満たす微分方程式を導け（定数変化法）

(d) $q \neq 0$ の場合，$C(t)$ をもとめ、一般解を求めよ。

3. 強制振動をあらわす次の微分方程式を考えよう.ω, Ω, A は定数

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\cos\Omega t$$

(a) 斉次方程式の一般解をもとめよ。

(b) $\omega \neq \Omega$ のとき、$x_s = A\cos\Omega t$ として特解 x_s を求めよ。

(c) $\omega \neq \Omega$ のとき、一般解を求め、図示せよ。

(d) $\omega = \Omega$ のとき、$x_s = At\sin\omega t$ として特解 x_s を求めよ。

(e) $\omega = \Omega$ のとき、一般解を求め、図示せよ。物理的にはどんな状況か、考察せよ。

4. 微分を $'$ で書くことにして関数 $x = x(t)$ に関する斉次の微分方程式

$$x''' - 2x'' - x' + x = 0$$

の一般解を求めよう。

(a) $x(t) = e^{\lambda t}$ とおいてこれが微分方程式を満たすとき、λ の満たす方程式を求めよ。

(b) 一般解を求めよ。

5. 以下の斉次の微分方程式の一般解を求めよう。

$$x'' - 2x' + x = 0$$

(a) $x(t) = e^{\lambda t}$ とおいてこれが微分方程式を満たすとき、λ の満たす方程式を求めよ。

(b) 上で求めた λ をもちいて、$x(t) = te^{\lambda t}$ が微分方程式を満たすことを示せ。

(c) 一般解を求めよ。