— 力学 A:演習問題 7（発展） — 2011 年度 1 学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

I. 時刻 t における一次元の質点の座標を $x = x(t)$ として、速度に比例する抵抗力と一般の外力の下での強制振動の解を順に求めよう。まず、運動方程式を以下のように書こう。

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x \quad = \quad f(t) \quad (*)$$

I.1 まず準備として一階線形方程式 $\dot{x} + p(t)x = 0$ の一般解は C を定数として $x(t) = C\exp(-\int_{t_0}^{t} d\tau p(\tau))$ であることを微分して確認せよ。ただし t_0 も定数である。

I.2 $\dot{x} + p(t)x = q(t)$ の特解を $x(t) = C(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} d\tau p(\tau))$ の形を仮定して求めよう。ここで $C(t)$ はある関数である。この $C(t)$ はどんな微分方程式をみたすか？(定数変化法)

I.3 [I.2] の $C(t)$ を求め、$\dot{x} + p(t)x = q(t)$ の一般解を書き下せ。

I.4 (*) の斉次解つまり $f(t) = 0$ の場合の解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求め、斉次方程式の一般解が $x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ であることを確認せよ。ここで C_1, C_2 は定数である。

I.5 (*) の特解を $x = x_1(t)C_1(t) + x_2(t)C_2(t)$ とする。ここで C_1, C_2 は関数である。このとき、$\dot{x}$ を計算し、$x_1\dot{C}_1 + x_2\dot{C}_2 = 0$ (**) を要求すれば、$\dot{x} = \dot{x}_1C_1 + \dot{x}_2C_2$ となる。これをさらに微分し (*) に代入することで $C_1(t)$, $C_2(t)$ が満たす方程式が (**) と共に以下のようにまとめられることを示せ。

$$W(t)\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

I.6 $D = \det W = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1$ とし，$\dot{D} + \gamma D = 0$ を示せ。

I.7 ある時刻で $D \neq 0$ なら常に $D \neq 0$ を示せ。

I.8 [I.5] を解いて C_1, C_2 をもとめ、(*) の特解 $x_s(t)$ が次のようになることを示せ。ここで t_0 は任意の時刻である。

$$x_s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{-x_1(t)x_2(\tau) + x_2(t)x_1(\tau)}{D(\tau)} f(\tau)$$

II. 摩擦のない 1 次元の質量 m 質点がばね定数 $k = m\omega^2$ のバネにつながっており $t = -\infty$ で静止しているとする。この系に時刻 t で外力 $F(t)$ を作用させたときの運動を考える。ただし $F(t) \to 0$ ($t \to \pm\infty$) である。

II.1 運動方程式を書け。

II.2 運動方程式の斉次解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を複素型で求めよ。

II.3 [I.6] の D を求めよ。

II.4 時刻 t での質点の座標が以下のようになることを示せ。

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_{-\infty}^{t} d\tau \sin\omega(t-\tau) F(\tau)$$

II.5 一般の関数 $g(t,\tau)$ に対して以下の関係式を示せ。

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{-\infty}^{t} g(t,\tau) d\tau \Big) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} g(t,\tau) d\tau + g(t,t)$$

II.6 質点の速度 $\dot{x}(t)$ を求めよ。

II.7 時刻 t における全エネルギー $E(t)$ が次のようになることを示せ。

$$E(t) = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{t} d\tau\, e^{i\omega(t-\tau)} F(\tau) \right|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{t} d\tau\, e^{-i\omega\tau} F(\tau) \right|^2$$

II.7 外力が単振動の周期に比べて極めて短時間に働く場合 $t = -\infty$ から $t = +\infty$ の間に質点が得たエネルギー $E(\infty)$ は、次のようにかける。(およそ $t = t_F$ に力が働くとする)

$$E(\infty) = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{t} d\tau\, e^{-i\omega(\tau - t_F)} F(\tau) \right|^2 \approx \frac{1}{2m} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, F(\tau) \Big)^2$$

これを質点が$t = -\infty$ から $t = +\infty$ の間に得た力積 が$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, F(\tau)$ であることから物理的に説明せよ。ヒント：力積と運動量変化の関係を用いよ。(復元力による力積は周期性から零とみなす)