— 力学 A:演習問題 4 — 2011 年度 1 学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

I. 微分のチェーン則を復習しよう。

I.1 x, y の関数 $X(x,y), Y(x,y)$ に関して X, Y の関数 $f(X,Y)$ は $f(X(x,y), Y(x,y))$ とみなすことで x, y の関数とも見なせる。これを $\tilde{f}(x,y) = f(X(x,y), Y(x,y))$ と書こう。微小量の間の関係式

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\delta X + \frac{\partial f}{\partial Y}\delta Y, \quad \delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y, \quad \delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y$$

を順に代入し以下を導け。

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y},$$

これを $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial Y}, \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial Y},$ と書く。

I.2 X_j $(j = 1, \cdots m)$ の関数 $f(X_1, \cdots, X_m)$ に関して $X_j = X_j(x_1, \cdots, x_n)$ と X_j が x_i $(i = 1, \cdots, n)$ の関数であるとき、以下を導け

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial X_j}$$

II. 右手系の x, y, x 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ として以下の問いに答よ。

II.1 z 軸周りに角度 θ だけ座標系を回転したとき、それぞれ $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ を回転して $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ となったとする。

II.1-1 ベクトル $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ を $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ で表せ。例えば、$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta$ である。

II.1-2 $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ を $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ を基底としたときの、ベクトルの表示 $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ を求めよ。

II.1-3 任意のベクトル $\vec{v}$ に対して基の座標系での表示を $\boldsymbol{v}$ 新しい座標系での表示を $\boldsymbol{v}'$ としたとき、$\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{v}'$ となる 3×3 行列 T を書き下せ。またこの T が直交行列であることを確認せよ。

II.2 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の変換則 $\boldsymbol{r} = T\boldsymbol{r}'$　から、T が直交行列であることを用いて $\boldsymbol{r}' = \widetilde{T}\boldsymbol{r}$ を導け。

II.3 $\boldsymbol{r}_i = x_i$ としたとき、[I.4] と微分のチェーン則

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_j}$$

からナブラがベクトルとして変換することを示せ。

III. 外積について議論しよう。

II.1 以下の関係式を示せ。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

II.2 以下の関係式を成分を使って直接計算により示せ。

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

II.3 [II.2] の結果を使い

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$$

を示せ。

II.4 [II.2] の結果を使い $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ を示せ。ただし，θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とがなす角である。

VI. 角運動量について考えよう。

IV.1 原点中心とする半径 R, 角速度 ω の等速円運動をする質量 m の質点の角運動量ベクトル $\vec{L}$ をもとめ、その大きさと向きを示せ。

IV.2 一般の質点の運動を考える。座標の原点を貫く方向に外力が働いている場合、角運動量は保存することを示せ。

V. （発展）ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ がベクトルとして変換するとき $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ もベクトルとして変換することを示せ。