— 力学 A:演習問題 2 — 2011 年度 1 学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

I. 質点の運動方程式 $F = ma$ の帰結について考えてみよう。

I.1 運動エネルギーを $T = \frac{1}{2}mv^2$ としたとき、$\dot{T} = Fv$ を導け。

I.2 鉛直下向きに x 軸をとったとき、質点にはたらく重力 $F = mg$ は保存力か否か応えよ　(g は重力加速度)。もし保存力の場合 $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$ となる $V(x)$ を書き下せ。

I.3 [I.2] の設定で時刻 $t = 0$ に原点から上向きに初速度 v_0 で投げあげた質点の運動を微分方程式を解いて定めよ。

I.4 [I.3] に引き続いてこの問題で [I.1] の関係式を直接確かめよ。

I.5 ポテンシャル $V(x)$ の中の質点の運動を考えるとき、系の全力学的エネルギーを E としよう。このとき、どんな初期条件の運動を考えても、x の領域 $R = \{x \big| E - V(x) < 0\}$ の領域には質点は決して立ち入らないことを示せ。(ヒント：運動エネルギーは負にならないことを用いよ。) なお量子論によればこの条件は緩和される（トンネル効果)。

II. 速度 v に比例する抵抗力 ξv をうける時の強制振動は次の運動方程式に従う。

$$m\ddot{x} \;=\; -kx - \xi v + F_e \cos \Omega t$$

これを $x = \mathrm{Re}\, z$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\gamma = \frac{\xi}{m}$, $f_e = \frac{F_e}{m}$ として、次のように書く

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z \;=\; f_e e^{i\Omega t}$$

II.1 特解を次の形 $z_0 = Ae^{i\Omega t}$ と仮定し A がつぎのようになることを示せ。

$$A \;=\; \frac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega}$$

II.2 $\Omega_0^2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$, $\Omega_0^2 e^{i\delta} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega$ とおいて (Ω_0 は実）特解が次のようになることを示せ。

$$x_0 \;=\; \mathrm{Re}\, z_0 = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

II.3 $z = e^{\lambda t}$ とおいて斉次方程式に代入し, λ が次のようになることを示せ。

$$\lambda \;=\; \lambda_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

II.2 摩擦が小さいとき ($\gamma < 2\omega_0$) 斉次解は次のように振動しながら減衰することを示せ（減衰振動)。ただし、$\omega_o' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2} < \omega_0$ である。

$$x \;=\; Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0' t + \theta'), \quad \text{ここで } C, \theta' \text{ はある定数。}$$

II.3 摩擦が大きいとき ($\gamma > 2\omega_0$) $\lambda_\pm < 0$ を示し、斉次解が次のようにと振動せず減衰することを確認せよ（過減衰)。

$$x \;=\; C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

II.4 以上いずれにせよ $\gamma \neq$ であるかぎり、斉次解は時間がたてば減衰してしまうので十分時間がたてば、次のように振動は非斉次解のみとなる。

$$x \;\to\; \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

Ω の関数として遅れ δ を $\Omega : 0 \to \infty$ で図示せよ。

III. $D = \frac{d}{dt}$ としたとき、関数 $x = x(t)$ に関する線形常微分方程式について議論しよう。

III.1 $(D^2 - 2D + 3)x = 0$ の一般解を求めよ。

III.2 $(D^2 - 2D + 1)x = 0$ において $x = e^{\lambda t}$ を仮定して、λ を求めよ。

III.3 $(D-1)^2 e^{\lambda t} = (\lambda - 1)^2 e^{\lambda t}$ の両辺を λ で微分しそのあとで $\lambda = 1$ とおくことで $(D-1)^2(te^{\lambda t}) = 0$ を導け。

III.4 $(D^2 - 2D + 1)x = 0$ の一般解を求めよ。

III.5 ここでの議論に従って II. で $\gamma = 2\omega_0$ の時の斉次解を書き下し、これも時間とともに減衰することを示せ。(臨界減衰)