力学A 演習問題 6

I.1 (物理学における多様性と普遍性の意味について説明し、質点の力学の意義に関して考えるところを記せ。)

(多様性 … 色、形、化学反応、材料の構造形成 などの 物質の持つ全ての特性について、どれがどのように違い、なにが特徴的で、どのように有用なのか。
→「化学」「材料科学」、「生物学」などが専門とする。)

物理学における
多様性 …{ ・野球のピッチャーの投げるボールの運動 → ボールの回転、空気抵抗
・自動車がカーブする → 車高がいくらか
・銀河の運動 → 銀河の形、密度分布
がそれぞれ深く関わっていること。

普遍性 … あらゆる物体の運動に共通な法則を見出すことで、それに関する統一的な記述をすること。

質点の力学の意義
→ あらゆる物体を質点とみなして得た運動法則によってどんな物体でも質点と見なせる時間スケール、空間スケールではその運動法則を適用できるため、運動が記述できること。

I.2 (自由落下の消しゴム、紙 → Newton eq. の普遍性 について のべよ)
2つの物体を比べると、消しゴムは空気抵抗が小さく、紙は空気抵抗が大きい、という多様性が見られ、それらの違いがわかる空間スケールでは速度は違って見えるが、共に質点と見なせる空間スケールでは Newton eq. における自由落下の運動を考えたとき、物体の速度は質量によらないという普遍的な法則が導かれる。

I.3 時刻 t は独立変数であり、加速度 $\vec{a}$、速度 $\vec{v}$、位置 $\vec{r}$ は空間を表すための3つの成分をそれぞれもつベクトルとして、Newton eq. $m\vec{a} = \vec{F}$ より

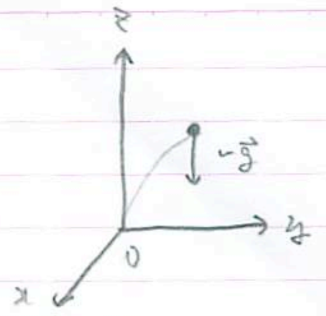
$$m\vec{a} = m\vec{g}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{g}$$
$$\vec{v} = t\vec{g} + \vec{v}_0$$
$$\frac{d}{dt}\vec{r} = t\vec{g} + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t^2\vec{g} + t\vec{v}_0 + \vec{r}_0$$ //

($\vec{r}_0$ は原点とする。)

I.4 鉛直上向きをz軸とすると $\vec{g} = {}^t(0, 0, -g)$

$\vec{v_0} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ $\quad \vec{r_0} = {}^t(0, 0, 0)$



より、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_1 t \\ v_2 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_3 t \end{pmatrix}$$

I.5 運動方程式は普遍的に成立するが、$\vec{F}$, $\vec{a}$ は基底、座標系に依存するので、ある運動を考えるとき、より記述しやすい座標系を選ぶことで、解析しやすくする。

I.6 座標系や基底に依存しない大きさと向きをもつ量であり、任意の座標系に対して座標変換が可能なもの。

I.7. いえない
この3列に書いたものは、特定の原子番号、質量数、中性子数という座標系でのみ定義される量であるから。

II.1 $ma = -kx$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad$ —①

xの値を

$x_1 = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$, $\; x_2 = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

とすると①は成立。

$\therefore \; x = C_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

$\therefore \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ //

学籍番号 201110875　氏名 成田 昴平　DATE / /　PAGE 3 / 8

II.2　$F = -kx$ は $V = \frac{1}{2}kx^2$ としたとき

$$F = -\frac{d}{dx}V = -\frac{d}{dx}\frac{1}{2}kx^2 = -kx$$ をみたすポテンシャル力である。

速度がもっとも大きい時刻を t_1 速度0の時刻を t_2 とすると、

運動方程式　$ma = -kx$

両辺に v かけて $t_1 \to t_2$ で積分すると、

$$(右) = W = \int_{t_1}^{t_2} f kxv\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) dt = -\left(\frac{1}{2}kx^2(t_2) - \frac{1}{2}kx^2(t_1)\right)$$ //

$$(左) = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}\cdot v\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1)$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_m^2 = \Delta T$$

$\therefore$ $W = \Delta T$

外力のした仕事が運動エネルギーの変化になる。

$\therefore$ $W = \Delta T$

$$= -\frac{1}{2}mv_m^2$$ //

II.3　~~一般的に~~、周期を $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ とすると、※速度がもっとも大きいとき(※時刻 t_1 とする)から ※速度0に(※時刻 t_2 とする) なるまでの時間は $T/4$ である。ここで $t_1 \to t_2$ の力積を考える。

いま $t_1 = 0$ とすると $t_2 = 0 + \frac{T}{4} = \frac{T}{4}$ であり、

(力積) = (運動量変化) であるから、

$$I = P_2 - P_1 = -mv_m$$ //

定義より

$$I = \int_{t_1}^{t_2}(-kx)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} ma\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}\,dt = m\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} dv$$

$$= mv(t_2) - mv(t_1) = m\cdot 0 - mv_m = -mv_m$$ //

II.4 $ma = -kx - \xi v$ ∴ $\ddot{z} + \omega_0^2 z + \gamma \dot{z} = 0$ —①

$(\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \gamma = \frac{\xi}{m})$ $(x = \mathrm{Re}\, z)$

$z = e^{\lambda(t+\theta)}$ とおくと. $\dot{z} = \lambda z$ $\ddot{z} = \lambda^2 z$ ①へ代入して

$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2) z = 0$ $z \neq 0$ より

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ ∴ $\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

$\gamma_0 = 2\omega_0$ すなわち $\frac{\xi_0}{m} = 2\omega_0$ ∴ $\xi_0 = 2m\omega_0$

(i) $\xi > \xi_0$ のとき $\gamma > 2\omega_0$ ∴ $\gamma^2 > 4\omega_0^2$ ∴ $\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$

よって $\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \in \mathbb{R}$ であるから $\lambda = \lambda_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} < 0$

∴ $x = C_1 e^{\lambda_+(t+\theta)} + C_2 e^{\lambda_-(t+\theta)} = C_1' e^{-|\lambda_+|t} + C_2' e^{-|\lambda_-|t}$ (過減衰)

(ii) $\xi < \xi_0$ のとき $\gamma < 2\omega_0$ ∴ $\gamma^2 < 4\omega_0^2$ ∴ $\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$

よって $\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \notin \mathbb{R}$ より $\lambda = \lambda_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}\, i}{2}$

$= \frac{-\gamma \pm 2\omega_0 i \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}}{2}$

$= -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0' t$ $\left(\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}\right)$

∴ $z = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}(t+\theta)} e^{i\omega_0'(t+\theta)} + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}(t+\theta)} e^{-i\omega_0'(t+\theta)}$

$= e^{-\frac{\gamma}{2}(t+\theta)} \left((C_1 + C_2)\cos\omega_0'(t+\theta) + i(C_1 - C_2)\sin\omega_0'(t+\theta)\right)$

$x = \mathrm{Re}\, z = e^{-\frac{\gamma}{2}(t+\theta)} (C_1 + C_2) \cos(\omega_0' t + \omega_0' \theta)$

$= C e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos(\omega_0' t + \theta')$

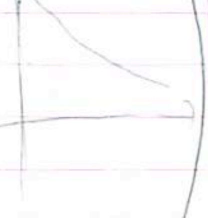
(iii) $\xi = \xi_0$ のとき $\gamma = 2\omega_0$ ∴ $\lambda = \lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} = -\omega_0$

$z = te^{\lambda t}$ としても ①は成立 よって $z = te^{\lambda t}$ もとっかい。

∴ $z = C_1 e^{\lambda(t+\theta)} + C_2 t e^{\lambda t}$

$= C_1' e^{t} + C_2 t e^{\lambda t} = e^{-\omega_0 t}(C_1' + tC_2)$

(臨界減衰)



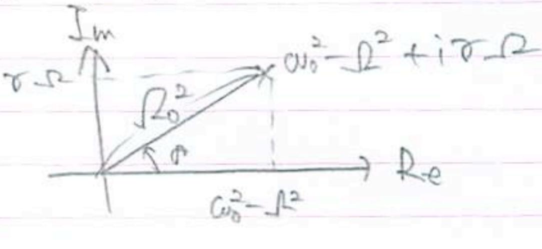
II.5 $ma = -kx - \xi v + F_e \cos \Omega t$

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t} \quad \left(x = \mathrm{Re}\, z, \quad f_e = \frac{F_e}{m} \right)$$

$z = Ae^{i\Omega t}$ とすると. $\dot{z} = i\Omega z \quad \ddot{z} = (i\Omega)^2 z = -\Omega^2 z$

$\therefore \ (-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2) \cancel{Ae^{i\Omega t}} = f_e \cancel{e^{i\Omega t}}$

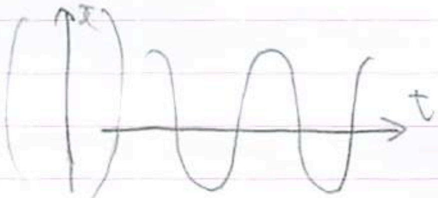
$$A = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}}$$



$$\therefore z = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}} e^{i\Omega t} = \frac{f_e}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t - \delta)}$$

$$x = \mathrm{Re}\, z = \frac{f_e}{\Omega_0^2} \cos(\Omega t - \delta) \quad \longleftarrow \text{非斉次の特解}$$

II.4 より 斉次解 は $t \to \infty$ ですべて 0 に収束するから
十分時間後は非斉次解のみとなり、$x = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$
となる.



II.6 仕事率を P とすると

$$P = F \cdot v = F_e \cos \Omega t \cdot \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt}\left(\frac{F_e}{\Omega} x \sin \Omega t \right)$$

学籍番号 201110875　名前 成田 昴平　DATE / /　PAGE 6 / 8

Ⅲ.1　外力が単位時間あたりにする仕事

Ⅲ.1　運動方程式　$\vec{F} = m\vec{a}$

の両辺に $\cdot\vec{v}$（内積として $\vec{v}$ をかける）すると

左 $= \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{F}\cdot\vec{r}$（∵ 微小な時間では $\vec{F}$ の各成分は一定と見なせる．）

$= \frac{d}{dt}F_i r_i$

右 $= m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(\vec{v})^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv_i^2$

$\therefore \frac{d}{dt}F_i r_i = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv_i^2$

運動エネルギー変化は外力のする仕事の変化になる。

Ⅲ.2　保存力とは、質点が同じ位置にあれば、どんな時刻でも必ず同じ力となるような種類の力のこと．

Ⅲ.3　運動方程式　$\vec{F} = m\vec{a}$　の両辺も $\boxed{\cdot\vec{v}}$ する。

左 $= \vec{F}\cdot\vec{v} = -\nabla V\cdot\vec{v} = -\vec{v}\cdot\nabla V$

$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dx_3}{dt}\right)$

$= -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$

右 $= m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{d}{dt}K$

$\therefore -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{dK}{dt}$

両辺 $t_i \rightarrow t_f$ で積分て

左 $= \int_{t_i}^{t_f} -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}dt = -\int_{t_i}^{t_f}\frac{dV}{dt}dt = -\int_{V(t_i)}^{V(t_f)}dV = -(V(t_f) - V(t_i))$

右 $= \int_{t_i}^{t_f}\frac{dK}{dt}dt = K(t_f) - K(t_i)$

$\therefore K(t_f) - K(t_i) = -(V(t_f) - V(t_i))$

$\therefore K(t_f) + V(t_f) = K(t_i) + V(t_i)$

$\therefore K + V = E$（一定）

E：力学的エネルギー

III.4 外力が働かないとき 運動方程式は

$m\vec{a} = \vec{0}$ すなわち $m\dot{\vec{v}} = \vec{0}$

∴ $\dot{\vec{p}} = \vec{0}$ （$\vec{p}$：運動量ベクトル）

∴ $\vec{p} = \vec{p}_0$ （一定）

∴外力が働かないとき、運動量が保存する。つまり、不変量となる。

III.5 エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{m}{r} = E$ を考える

$r \to \infty$ となるときを考えると、

$$\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{m}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - k\frac{m}{\infty} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 > 0$$

∴ $|v| > \sqrt{\frac{2k}{r}}$ 仮想的に $|v| = \sqrt{\frac{2k}{r}}$ となるときの $|v|$ を v, r を r_0 とおくと、

$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$ となり、このとき、

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - k\frac{m}{r_0} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2k}{r_0}}\right)^2 - k\frac{m}{r_0} = 0$$ となる。

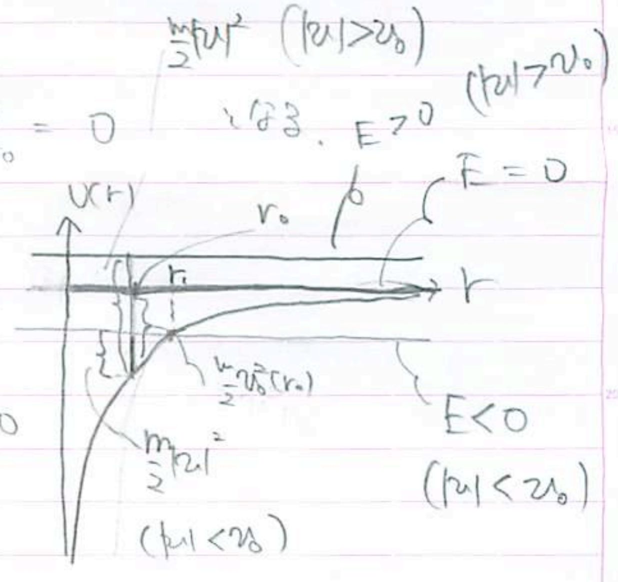
また、$U(r) = -k\frac{m}{r}$ として、右図えると、

$|v| = v_0$ すなわち 仮想的に $E = 0$ となるときは r 軸に重なる。$r = r_0$ において

$|v| > v_0$ のとき、$E = \frac{1}{2}m|v|^2 - k\frac{m}{r_0} > E_0 = 0$

∴ $E > 0$

このとき、無限遠点へいく。



$|v| < v_0$ のとき、$E = \frac{1}{2}m|v|^2 - k\frac{m}{r_0} < E_0 = 0$

∴ $E < 0$

このとき、有限の範囲で運動する。（r_1 までいってもどってくる）

IV.1 中心力…時刻tに位置ベクトル$\vec{r}$にある質点に働く力が

$$\vec{F} = K(t)\,\vec{r} \quad (\vec{F} \parallel \vec{r} \text{ となる力})$$

と表わせる力

角運動量…位置ベクトル$\vec{r}$、運動量ベクトル$\vec{p}$としたとき、

$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$ で表わされる$\vec{L}$のこと。

IV.2 中心力の働くときの運動方程式

$$m\ddot{\vec{r}} = K\vec{r}$$

両辺を$\vec{r}$と外積とって

$$m\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = K\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = -\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} = \vec{0}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$$

∴角運動量は保存する。

IV.3 保存する。

例) 単振動 $\vec{F} = -k\vec{r} = K(t)\vec{r}$ は保存力であるから、エネルギーは保存する。

IV.4 $V = -k\frac{m}{r}$ とすると、 $\vec{F} = -\nabla V = km\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} r^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial y} r^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \end{pmatrix}$

$$= km\begin{pmatrix} -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x} \\ -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial y} \\ -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = -k\frac{m}{r^2}\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = -k\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$

たしかに万有引力はポテンシャル力となる。