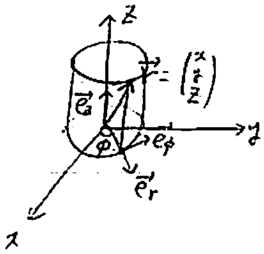
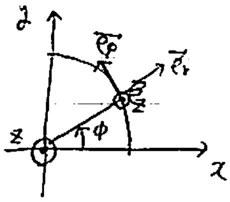
力学A 演習5 レポート #201110852 [illegible]咲子

1. 円柱座標 $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$

1.1 $\mathbf{e}_r = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|}, \quad \mathbf{e}_\phi = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|}, \quad \mathbf{e}_z = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|}$





偏微分で求められる

← 問: r, ϕ, z それぞれのみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e_r}, \vec{e_\phi}, \vec{e_z}$ を標準的な基底 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ を用いて書け。これらがこの順で右手系をつくることを示せ。$\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$ である。

$$\vec{r} = \vec{e_1}x + \vec{e_2}y + \vec{e_3}z = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

より

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$

$\therefore\ \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ より、 $\vec{e_r} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ //

- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right| = \sqrt{r^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} = r$

$\therefore\ \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ より、 $\vec{e_\phi} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ //

- $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| = 1$

$\therefore\ \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、 $\vec{e_z} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

右手系であることを示す ⇒ $\vec{e_r} \times \vec{e_\phi} = \vec{e_z}$, $\vec{e_\phi} \times \vec{e_z} = \vec{e_r}$, $\vec{e_z} \times \vec{e_r} = \vec{e_\phi}$ を示せばよい。

- $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\phi + \sin^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z$

- $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_r$

- $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi$

よって右手系。

力学A 演習5 レポート

I.2 $\mathcal{O}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, $\mathcal{O}_{r\phi z}=(\vec{e_r},\vec{e_\phi},\vec{e_z})=\mathcal{O}T$となる3×3行列Tを求めよ。

$$(\vec{e_r},\vec{e_\phi},\vec{e_z})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathcal{O}_{r\phi z}$$

$$\mathcal{O}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$$

∴ $\mathcal{O}_{r\phi z}=\mathcal{O}T$ となる行列Tは、

$$T=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{//}$$

I.3 一般のベクトル $\vec{v}$の標準基底での成分 vと、円柱座標での成分 $v_{r\phi z}$との関係を導き、位置ベクトル $\vec{r}$について確認せよ。

- 標準基底

$$\vec{v}=\mathcal{O}v=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

- 円柱座標

I.2のTを用いて.

$$\vec{v}=\mathcal{O}_{r\phi z}v_{r\phi z}=\mathcal{O}Tv_{r\phi z}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_r\\ v_\phi\\ v_z\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}v_r\\ v_\phi\\ v_z\end{pmatrix}=Tv_{r\phi z}\ _{//}$$

位置ベクトル $\vec{r}$について.

$$\mathbb{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=T\,\mathbb{r}_{r\phi z}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_r\\ r_\phi\\ r_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_r\cos\phi-r_\phi\sin\phi\\ r_r\sin\phi+r_\phi\cos\phi\\ r_z\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{r}_{r\phi z}={}^tT\,\mathbb{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\phi+y\sin\phi\\ -x\sin\phi+y\cos\phi\\ z\end{pmatrix}$$

より、I.1から成立することが分かる

力学A 演習5 レポート

I.4 $\vec{\nabla}$を円柱座標で表現しよう。

i. 微分のチェーン則を用いて $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$ 等を具体的に計算し、$\frac{\partial}{\partial x}$などを r, ϕ, z で表せ。

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}=\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z}=-r\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix},\quad \text{ただし} A=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

両辺に A^{-1}をかけて

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial y}=\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\end{cases}$$

ii. 円柱座標での $\vec{\nabla}$の表示 $\vec{\nabla}=\vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e_\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$ を求めよ。

$\vec{\nabla}$の変換行列もAである。円柱座標において ∇は、

$$\nabla=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}_{/\!/}$$

II. 中心力 $\vec{F}$による質量 mの質点の運動を考える。

II.1 $\vec{F}$が中心力であるとは何か述べよ。

質点に働く力 $\vec{F}$が位置ベクトル $\vec{r}$に平行であること。$\vec{F}\propto\vec{r}$

II.2 中心力による運動では、角運動量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ ($\vec{p}$は運動量)が運動の定数であることを示せ。

$\mathbb{L}$を時間で微分すると、

$$\dot{\mathbb{L}}=\frac{d}{dt}(\mathbb{r}\times\mathbb{p})=\dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{p}+\mathbb{r}\times\dot{\mathbb{p}}$$

$$=\mathbb{r}\times(m\dot{\mathbb{r}})+\mathbb{r}\times(k\mathbb{r})$$

$$=0$$

$\because$ 中心力 $\vec{F}=k\vec{r}$ (kは比例定数)

運動方程式 $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}})=\dot{\vec{p}}$

$\therefore \mathbb{F}=k\mathbb{r}=\dot{\mathbb{p}}$

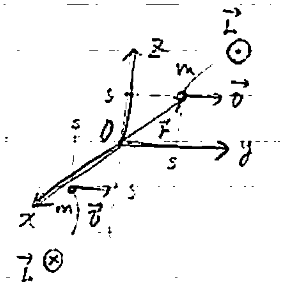
$\therefore \mathbb{L}$は一定，(運動の定数)である。

力学A 演習5 レポート

II.3 時刻tにおいて質点がyz平面上(0, s, s)、s≠0にあり、速度ベクトルがy軸正方向を向いているとき、保存する角運動量はどちら向きか。

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ s' \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s' > 0 \quad \text{より}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{p} = \mathbb{r} \times (m\mathbb{v}) = mss' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = mss' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

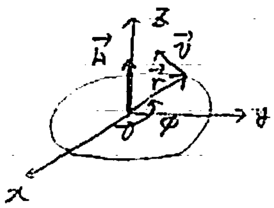


∴ x軸 $\begin{cases} \text{負方向} & (s>0) \\ \text{正方向} & (s<0) \end{cases}$

II.4 $\vec{L}$方向にz軸をとり円柱座標で考える。

i. 角運動量保存則を円柱座標で成分を用いて表せ。

$$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{p} = m \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \phi\dot{z} - z\dot{\phi} \\ z\dot{r} - r\dot{z} \\ r\dot{\phi} - \dot{r}\phi \end{pmatrix}$$



角運動量保存則 $L_x = 0,\ L_y = 0,\ L_z$ 一定 より

$$\begin{cases} \phi\dot{z} - z\dot{\phi} = 0 & \cdots ① \\ z\dot{r} - r\dot{z} = 0 & \cdots ② \\ r\dot{\phi} - \dot{r}\phi = C\ (\text{一定}) & \cdots ③ \end{cases}$$

ii. 面積一定の法則とは何か。

①より、$z = \dfrac{\phi}{\dot{\phi}}\dot{z}$ …①'

①'を②に代入する。 $\dfrac{\phi}{\dot{\phi}}\dot{z}\dot{r} - r\dot{z} = 0$

$$\dot{z}(\phi\dot{r} - r\dot{\phi}) = 0$$

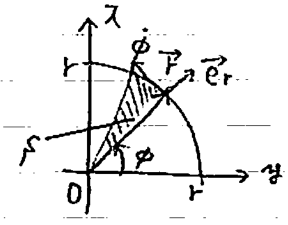
③より、$\phi\dot{r} - r\dot{\phi} = C$ ∴ $\dot{z} = 0$

さらに②より、$z\dot{r} = 0$ zは定数だから、$\dot{r} = 0$

∴ ③より $r\dot{\phi} = C$ (一定) となる。

これをxy座標に戻って考えると、

$\dot{\phi} = \dfrac{d}{dt}\phi$ ・単位時間のφ方向の変化



単位時間あたり、動径が通る部分の面積Sは、

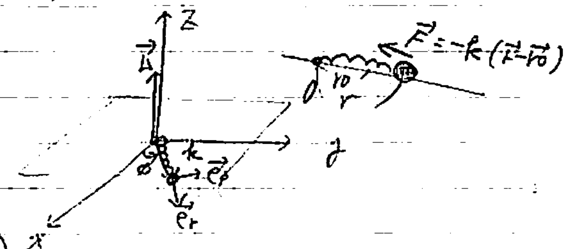
$$S = \frac{1}{2} r \cdot r\dot{\phi} = \frac{1}{2} r^2\dot{\phi} = \frac{r}{2}(r\dot{\phi})$$
$$= \frac{r}{2} C \quad (\text{一定})$$

よって、Sは一定になる。

これを面積一定の法則という。

力学A 演習5 レポート

問 ばね定数 k のバネでつながれた質点の運動を円柱座標で議論せよ。



自然長 $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r_0}) = -k'\vec{r} \quad (k' \text{は定数})$$

$$= -k\begin{pmatrix} r-r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\vec{r_0} = \frac{k-k'}{k}\vec{r}\right)$$

角運動量 $\mathbb{L} = \mathbb{r}\times\mathbb{p} = m\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{\phi}-\dot{r}\phi \end{pmatrix}$

運動方程式 $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = -k'\vec{r}$

$$\vec{r}\times\vec{F} = -k(\vec{r}\times\vec{r}) = 0$$

また $\vec{r}\times\dot{\vec{p}} = r\times\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) - \frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{0}$

∴ $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$

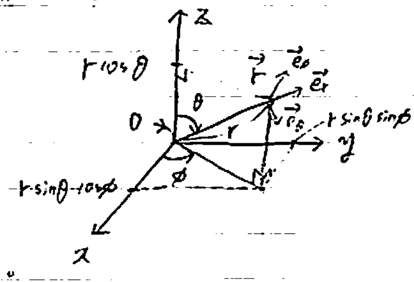
∴ 角運動量は保存する。 $(r\dot{\phi}-\dot{r}\phi = 0)$

$\vec{F}$は中心力

質点は $\vec{L}$ (z軸を法線とする) 平面内の運動を行う。

II. 極座標 $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ を考える。

II.1. 全空間を表現するために必要な r, θ, ϕ の取り得る値は何か。



r: $[0, \infty)$

θ: $[0, \pi]$

ϕ: $[0, 2\pi]$

II.2. r, θ, ϕ それぞれのみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}$ を標準的な基底 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ を用いて書け。
これらがこの順で右手系をつくることを $\vec{e_\phi} = \vec{e_r}\times\vec{e_\theta}$ を計算して示せ。

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

- $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta} = 1$

- $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r$

- $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \phi}\right| = \sqrt{r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = r\sin\theta$

∴ $\vec{e_r} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\vec{e_\theta} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $\vec{e_\phi} = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$

力学A 演習5 レポート

右手系であることを示す

・ $$e_r \times e_\theta = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\phi\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\ \cos\phi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi - \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = e_\phi$$

・ $$e_\theta \times e_\phi = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\,(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = e_r$$

・ $$e_\phi \times e_r = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\,(\sin^2\phi+\cos^2\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = e_\theta$$

よって右手系。

III.3 $O=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $O_{r\theta\phi} = (\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi) = OT$ となる 3×3 行列 T を求めよ。

$$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix} = O_{r\theta\phi}$$

$O=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ より、$O_{r\theta\phi} = OT$ となる行列Tは、

$$T = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

III.4 一般のベクトル $\vec{v}$ の標準基底での成分 $\boldsymbol{v}$ と、極座標での成分 $\boldsymbol{v}_{r\theta\phi}$ との関係を導き、位置ベクトルについて確認せよ。

・標準基底

$$\vec{v} = O\boldsymbol{v} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

・円柱座標

$$\vec{v} = O_{r\theta\phi}\boldsymbol{v}_{r\theta\phi} = OT\boldsymbol{v}_{r\theta\phi} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,T\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\\ v_\phi\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\\ v_\phi\end{pmatrix} = T\boldsymbol{v}_{r\theta\phi}$$ //

位置ベクトル $\vec{r}$ について

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = T\boldsymbol{r}_{r\theta\phi} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_r\\ r_\theta\\ r_\phi\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}_{r\theta\phi} = {}^tT\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\sin\theta\cos\phi + y\sin\theta\sin\phi + z\cos\theta\\ x\cos\theta\cos\phi + y\cos\theta\sin\phi - z\sin\theta\\ -x\sin\phi + y\cos\phi + 0\end{pmatrix}$$

よって、III.2より、成立することが分かる

力学A 演習5 レポート

III.5 極座標での ∇ の表示 $\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$ を求めよ。

微分のチェーン則を用いて

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} = r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ただし、$A = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$

両辺に A^{-1} をかけて.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ ∇ も 変換行列 T によって変換されるので、円柱座標における ∇ の成分 $\mathbb{V}$ は.

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad //$$

IV. x, y, z の間の関数関係を $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$ としたとき.
例えば、y を一定としたときの偏微分を $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ などとかく。

IV.1、$\delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$ から、$\delta z = 0$ として、以下の関係式を導け.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$\delta z = 0$ より、　δz の式から、

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$\delta z = 0$ なので、z は一定である。すると左辺は $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ と表せるので.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} \quad //$$

IV 2. IV 1で $\delta x = 0$ とすれば、どんな関係式が導かれるか。

$\delta x = 0$ のとき、 $\delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$

両辺 δz で割る $1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{\delta y}{\delta z}$

$\delta x = 0$ より x は一定である。すると $\frac{\delta y}{\delta z} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ と表せ、

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$$

$$\therefore \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$$

IV 3、 以下の関係式を導け。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

IV 1, 2 より $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ $(\delta x = 0, \delta z = 0)$

さらに、 $\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \delta x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \delta z$ に対し、

$\delta z = 0$ とおくと、 $\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \delta x$

$$1 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \frac{\delta x}{\delta y}$$

$\delta z = 0$ より z は一定である。すると、 $\frac{\delta x}{\delta y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ と表せ、

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

よって、これを代入すると $\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$

$$\therefore -1 = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \;//$$

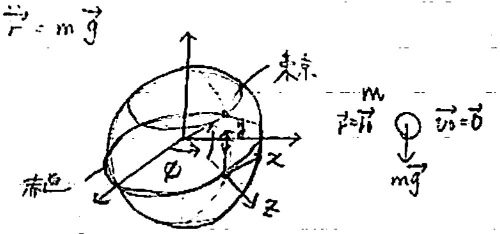
V. 東京（北緯 θ 東経 ϕ）における質点の自由落下を解析しよう。

V1. $\vec{g}$ を重力加速度ベクトルとして 質量 m の質点の運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$

を座標によらない形で解け。

$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$ より $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v_0}t + \vec{r_0}$

自由落下より $\vec{v_0} = \vec{0}$ $\therefore \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{r_0} \;//$

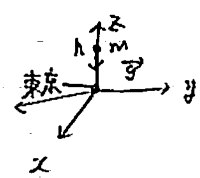


V2. 東京での自由落下を、東京と同じ経度であり赤道上の点での座標系としたもので成分を用いて解析せよ。

（xy 平面を水平面，x 軸を地球の自転方向に、z 軸を天上方向に）

まず座標の原点を東京としたとき

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad 高さ\ \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$



$$\therefore \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix}$$

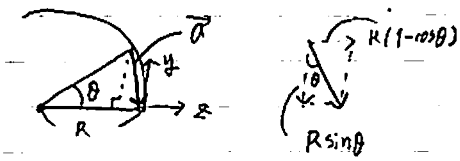
次に、x 軸を軸として座標軸を $-\theta$ 回転させ 原点を $\vec{a}$ ずらす

x 軸を軸とする θ 回転する 回転行列を T とすると 一般に、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta' & -\sin\theta' \\ 0 & \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

さらに、原点をずらすベクトル $\vec{a}$ は、Rを地球の半径として、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\theta \\ -R(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$



θ は緯度で、 $\theta' = -\theta$

よって、この座標系において

$$\vec{r}' = T\vec{r} + \vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix} + \vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta\left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right) \\ \cos\theta\left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right) \end{pmatrix} + \vec{a}$$