学籍番号：207710878　　名前：平尾 亮磨

I.1 （x, y の関数 $X(x,y)$, $Y(x,y)$ に関して X, Y の関数 $f(X,Y)$ は $f(X(x,y), Y(x,y))$ とみなすことで x, y の関数とも見なせる。これを $\tilde{f}(x,y) = f(X(x,y), Y(x,y))$ と書こう。微小量の間の関係式を導け。（一部略））

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\delta X + \frac{\partial f}{\partial Y}\delta Y$$
$$= \frac{\partial f}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y\right) + \frac{\partial f}{\partial Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y\right)$$

x で偏微分するとき $\delta y = 0$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

y で偏微分するとき $\delta x = 0$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y}$$

I.2 （X_j $(j=1,\dots,m)$ の関数 $f(X_1,\dots,X_m)$ に関して $X_j = X_j(x_1,\dots,x_n)$ と X_j が x_i $(i=1,\dots,n)$ の関数であるとき $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial X_j}$ を導け）

I.1 の式を一般化して、

$$\delta f = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial X_j}\delta X_j,\quad \delta X_j = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial X_j}{\partial x_\ell}\delta x_\ell$$

この2式より、

$$\delta f = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_j}\cdot\frac{\partial X_j}{\partial x_\ell}\delta x_\ell$$

また関数 $\tilde{f}$ に対して、以下の式が成り立つから、

$$\delta\tilde{f} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\ell}\delta x_\ell$$

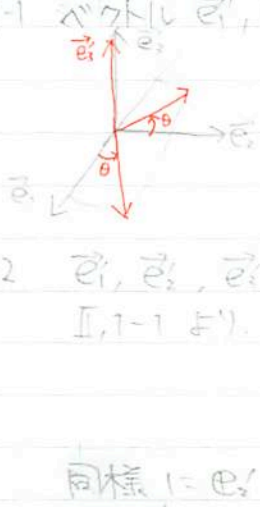
$f = \tilde{f}$ より $\delta f = \delta\tilde{f}$

$$\therefore \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_\ell}\delta x_\ell = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\ell}\delta x_\ell$$

δx_ℓ の項を抜き出すと、

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_\ell} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\ell}\delta x_\ell$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_\ell} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_\ell}$$

II.1-1 ベクトル $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ を $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ で表せ。例えば、$\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta$ である。



図より、

$$\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta$$
$$\vec{e}_2{}' = \vec{e}_2\cos\theta - \vec{e}_1\sin\theta$$
$$\vec{e}_3{}' = \vec{e}_3$$

II.1-2 $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ を $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ を基底としたときの、ベクトルの表示 e_1', e_2', e_3' を求めよ。

II.1-1 より、
$$\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,e_1'$$

同様に e_2', e_3' も求めると、

$$e_1' = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\quad e_2' = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\quad e_3' = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

II.1-3 (任意のベクトル $\vec{v}$ に対して旧の座標系での表示を v 新しい座標系での表示を v' としたとき，$v = Tv'$ となる 3×3 行列 T を書き下せ。またこの T が直交行列であることを確認せよ。)

$\vec{v} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) v$

$= (\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}) v'$

基底を同じにするには II.1-2より

$= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) e_1' e_2' e_3' v'$

$e_1' e_2' e_3'$ を T とする。成分だけ取り出して，

$$v = Tv' \quad \therefore T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また

$$T\tilde{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

∴ T は直交行列である。

II.2 (位置ベクトル $\mathbb{r}$ の変換則 $\mathbb{r} = T\mathbb{r}'$ から，T が直交行列であることを用いて，$\mathbb{r}' = \tilde{T}\mathbb{r}$ を導け)

$\mathbb{r} = T\mathbb{r}'$

左から $\tilde{T}$ を掛ける。

$\tilde{T}\mathbb{r} = \tilde{T}T\mathbb{r}'$

$\tilde{T}\mathbb{r} = E\mathbb{r}'$

$\mathbb{r}' = \tilde{T}\mathbb{r}$

II.3 ($r_i = x_i$ としたとき，[I.4.3] と微分のチェーン則 $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j'}$ から ナブラがベクトルとして変換することを示せ。)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \nabla' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n'} \end{pmatrix} \text{とする。}$$

I.2より，$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n'}\frac{\partial x_n'}{\partial x_i}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial x_n'}{\partial x_i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n'} \end{pmatrix} \text{となる。}$$

従ってナブラは，

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_n'}{\partial x_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_n} & \cdots & & \frac{\partial x_n'}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n'} \end{pmatrix}$$

$$= T\nabla'$$

よってナブラがベクトルとして変換される。

Ⅱ.1 以下の関係式を示せ。

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = \mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{A}\begin{pmatrix} B_2C_3 - C_2B_3 \\ B_3C_1 - C_3B_1 \\ B_1C_2 - C_1B_2 \end{pmatrix}$$

$$= (A_1(B_2C_3 - C_2B_3) + A_2(B_3C_1 - C_3B_1) + A_3(B_1C_2 - C_1B_2))$$

サラスの公式より $\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$

行列式は転置しても等しいので $\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = \mathbb{B}\begin{pmatrix} C_2A_3 - A_2C_3 \\ C_3A_1 - A_3C_1 \\ C_1A_2 - A_1C_2 \end{pmatrix}$$

$$= (B_1(C_2A_3 - A_2C_3) + B_2(C_3A_1 - A_3C_1) + B_3(C_1A_2 - A_1C_2))$$

サラスの公式より $\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} A_2B_3 - B_2A_3 \\ A_3B_1 - B_3A_1 \\ A_1B_2 - B_1A_2 \end{pmatrix}$$

$$= C_1(A_2B_3 - B_2A_3) + C_2(A_3B_1 - B_3A_1) + C_3(A_1B_2 - B_1A_2)$$

サラスの公式より $\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$

よって示された。

Ⅱ.2 (以下の関係式を成分を使って直接計算により示せ。
$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})$)

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2D_3 - C_3D_2 \\ C_3D_1 - C_1D_3 \\ C_1D_2 - C_2D_1 \end{pmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)(C_2D_3 - C_3D_2) +$$
$$(A_3B_1 - A_1B_3)(C_3D_1 - C_1D_3) +$$
$$(A_1B_2 - A_2B_1)(C_1D_2 - C_2D_1)$$

$$= A_2B_3C_2D_3 + A_3B_2C_3D_2 + A_3B_1C_3D_1 + A_1B_3C_1D_3 + A_1B_2C_1D_2 + A_2B_1C_2D_1$$
$$- A_2B_3C_3D_2 - A_3B_2C_2D_3 - A_3B_1C_1D_3 - A_1B_3C_3D_1 - A_1B_2C_2D_1 - A_2B_1C_1D_2$$

上の式において上段は $(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D})$ とまとめることができ、

下段は $-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})$ とまとめることができるので

$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})$ である。

III.3 ([III.2]の結果を使い $\varepsilon_{iab}\varepsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$ を示せ。)

$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})_i = \varepsilon_{iab}A_aB_b$, $(\mathbb{C}\times\mathbb{D})_i = \varepsilon_{icd}C_cD_d$ より

$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{icd}A_aB_bC_cD_d$ — ①

$(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})$

$= A_aC_aB_bD_b - A_aD_aB_bC_b$

$= \delta_{ac}A_aC_c\delta_{bd}B_bD_d - \delta_{ad}A_aD_d\delta_{bc}B_bC_c$

$= \delta_{ac}\delta_{bd}A_aB_bC_cD_d - \delta_{ad}\delta_{bc}A_aB_bC_cD_d$ — ②

①, ②より、

$\varepsilon_{iab}\varepsilon_{icd}A_aB_bC_cD_d = (\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})A_aB_bC_cD_d$

$\varepsilon_{iab}\varepsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bd}$ よって示された。

IV.1 (原点中心とする半径R、角速度ω の等速円運動をする質量m の質点の角運動量ベクトル$\vec{L}$ をもとめ、その大きさと向きを示せ。)

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ であり、$|\vec{r}| = R$ である。

よって $\vec{p}$ (運動量) について考える。

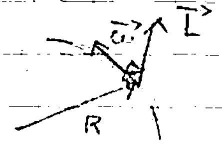
$\vec{p} = m\vec{v}$

ここで $|\vec{v}| = \omega$ であるから、

$|\vec{p}| = m\omega$

$\therefore |\vec{L}| = mR\omega$ //

その向きは



IV.2 (一般の質点の運動を考える。座標の原点を貫く方向に外力が働いている場合、角運動量は保存することを示せ。)

運動方程式より $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{p}$

$\vec{F}\times\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{p}\times\vec{r}$

$\vec{F}\times\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

ここで $\vec{F}$ と $\vec{r}$ は方向が同じであるから $\vec{F}\times\vec{r} = 0$

$\therefore \frac{d}{dt}\vec{L} = 0$

時間によって $\vec{L}$ が変化しないことを示している。従って角運動量は保存する。

Ⅴ （(発展) ベクトル $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ がベクトルとして変換するとき、$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ もベクトルとして変換することを示せ）

$\mathbb{A}', \mathbb{B}'$ が変換行列 T を用いて

$\mathbb{A}' = T\mathbb{A}$, $\mathbb{B}' = T\mathbb{B}$ と変換されるとする。

$$\tilde{T}(\mathbb{A}' \times \mathbb{B}') = \sum_{ijk} \tilde{T}_{Ii}(\varepsilon_{ijk} T_{jJ} T_{kK} A_J B_K)$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} T_{iI} T_{jJ} T_{kK} A_J B_K$$

（ここで $\det T = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$
IJK の並びによって ijk の並びも変化するから）

$$= \sum_{JK} \varepsilon_{IJK} \det T \, \cancel{T} A_J B_K$$

$$= \sum_{JK} \varepsilon_{IJK} J_J B_K = (\mathbb{A} \times \mathbb{B})_I$$

$\because (\mathbb{A}' \times \mathbb{B}') = T(\mathbb{A} \times \mathbb{B})$