学籍番号 20111 0889　　名前　八木 俊輔

力学　第8回レポート

3次元

Vector　$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Newton eq.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$
$$\vec{p} = m\vec{v}$$ ：運動量vector momentum

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

$t : t_i \longrightarrow t_f$ まで積分

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \dot{\vec{p}} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}(t=t_f) - \vec{p}(t=t_i) \equiv \Delta\vec{p}$$

└ $\vec{I}(t_i, t_f)$ ： $t_i \rightarrow t_f$ に質点に働いた力積(vector)

保存力、ポテンシャル力　$\vec{F}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ となる $V(\vec{r})$ が存在　　$V(\vec{r})$ ：ポテンシャルエネルギー

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ となること。
↖ $\vec{F}(x)$ と書いた。

場所 $\vec{r}$ に質点が存在するとき
$F(\vec{r})$ が働き、且つ $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$\underset{\text{grad}}{\vec{\nabla}}$ ： nabla　gradient　　$V(\vec{r})$ ： $\vec{r}$ ごとに1つの実数値が定める。

関数 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto$ 実数 $V(\vec{r})$

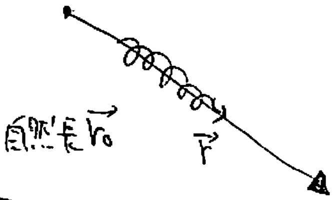
$\vec{\nabla} V$ ： vector

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{\nabla} V)_x &= \frac{\partial V}{\partial x} = \partial_x V \\ (\vec{\nabla} V)_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \partial_y V \\ (\vec{\nabla} V)_z &= \frac{\partial V}{\partial z} = \partial_z V \end{aligned}\right\} \quad (\vec{\nabla} V)_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial_i V \quad (i = x, y, z)$$

$\vec{\nabla}$ ：関数からvectorを作る演算子

ex) バネ



$$\widehat{\vec{r}-\vec{r}_0} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$\vec{F} = -k|\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot \overbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}$$

hat

$\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ （$\vec{A}$ 方向の単位 vector）

$\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\vec{\nabla}V$ となる $V(\vec{r})$ は？

$\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$

$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k|\vec{r}-\vec{r}_0|^2 = \frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)^2$ としてみる。

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\dfrac{1}{2}k(x-x_0)^2 = k(x-x_0) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{2}k(y-y_0)^2 = k(y-y_0) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\cdot\dfrac{1}{2}k(z-z_0)^2 = k(z-z_0) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-x_0) \\ k(y-y_0) \\ k(z-z_0) \end{pmatrix} = k(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

確かに $\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\vec{\nabla}V$

__1D__ $\quad F = m\dot{v} \qquad F = -\dfrac{dV}{dx}$

$Fv = m\dot{v}v = \dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{dk}{dt}, \quad k = \dfrac{1}{2}mv^2$

$t_i \to t_f$ で積分。 $\displaystyle\int_{t_i}^{t_f} dt\, Fv = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{dk}{dt} = k(t=t_f) - k(t=t_i) \equiv \Delta k$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, Fv = \int_{t_i}^{t_f} dt\, F(x)\,\dot{x}(t)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} (-)\frac{dV(x(t))}{dt}\cdot\frac{dx(t)}{dt}\,dt \quad \left(\text{if. } F = -\frac{dV}{dx} \text{ なら}\right)$$

$$= -\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \frac{dV}{dx} = -(V(x_f) - V(x_i))$$

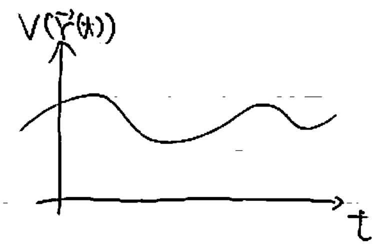
力学　第8回レポート

$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ 　　　$\cdot\vec{v}$ (内積する)

$$m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = m(\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z)$$
$$= \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}m\dot{z}^2$$
$$= \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{d}{dt}K$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{dK}{dt} = K(t_f) - K(t_i) = \Delta K$$
$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$ (保存力なら $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$)
$$= -\int_{t_i}^{t_f} (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{v}\,dt$$
$$= -\int_{t_i}^{t_f} \left(\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}}_{\frac{\partial V(\vec{r}(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right) dt$$

$V(\vec{r}(t))$
　$\vec{r} = \vec{r}(t)$ でのV
$V(\vec{r}(t))$: tごとに実数が定まる.



$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$ となる.

$V(x,y,z)$: 3変数の関数, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の関数

$\vec{r}$が少し変化することを考える.

$\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r} = \begin{pmatrix} x+\delta x \\ y+\delta y \\ z+\delta z \end{pmatrix}$ となったときのVはどれだけ変化?

$\delta f = f'\delta x$ 　　$\delta f = f'\delta x + \underbrace{\cdots}_{\delta x\to 0\text{のとき}0\text{になる}}$

δxの1次までとって, $\delta f = f'\delta x$ 　$df = f'dx$

復習　　$y=f(x)$　　$x \to x+\delta x$ となったとき，y はどう変化？

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \longrightarrow f'(x) \quad \delta x = 0$$

δx は小さい。　$\underbrace{f(x+\delta x)-f(x)}_{\delta f} \approx f'\delta x$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$V(x.y.z)$ を x だけの関数と考える．

$$\delta V = V(x+\delta x,\, y.z) - V(x.y.z)$$
$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \underbrace{\cdots\cdots}_{\delta x \to 0\text{ では }0}$$

V を x と y の関数と考える．

$$\delta V = V(x+\delta x,\, y+\delta x,\, z) - V(x.y.z)$$
$$= [V(x+\delta x,\, y+\delta y,\, z) - V(x,\, y+\delta y - z)]$$
$$+ [\underbrace{V(x.y+\delta y.z) - V(x.y.z)}_{\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta y}] \quad —\ ⊛$$

$$V(x+\delta x,\, y+\delta y,\, z) - V(x,\, y+\delta y.\, z)$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}^{(x.y+\delta y.z)}\delta x \leftarrow \text{少しずれた場所} \begin{pmatrix} x \\ y+\delta y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}^{(x.y.z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\delta y\right)\delta x = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \cancel{\bigcirc\,\delta x\,\delta y} = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x$$

V を $x.y.z$ の変数

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z$$

$\delta t \to 0$

$$\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = —$$

δt で割る

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

$\delta t \to 0$

$$\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

学籍番号 20110889　　名前(八木 俊輔)

力学 レポート第8回

$V(x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\Delta k = -\int_{t_i}^{t_f} (\nabla V)\cdot \vec{v}\, dt = -\int_{t_i}^{t_f} (\nabla V)\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot dt = -\int_{t_i}^{t_f} \frac{d(\vec{r}(t))}{dt} = -V(\vec{r}(t_f)) + V(\vec{r}(t_i))$$

$\Delta k = -\Delta V$　　$\Delta V = V(\vec{r}(t_f)) - V(\vec{r}(t_i))$

$\Delta E = 0$　　$E = k + V$　力学的全エネルギー

ポテンシャル力による運動では、力学的エネルギーは保存する。
　　　　　　　　　　　　　　　〃　　　　　不変

力学的エネルギー $k + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}(t))$ は運動の定数である。

f(x)の変化

$f(x+\partial x) = f(x) + f'\partial x + o(\partial x)$ ← ∂xの1次よりも速く零になる。

o：小文字の花文字のO　　order

$A = o(\partial x)$とは $\frac{A}{\partial x} \to 0$　$\partial x \to 0$で

$V(x, y, z)$：多変数の関数に対して、x, y, zの変化による変化による∂Vは以下の通り。

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$　　$\boxed{\text{Vector}}$ ← $\boxed{\text{座標変換}}$