201110844 荻野孝浩

3次元

Newton eq

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$: 運動量ベクトル

$t : t_i \to t_f$ まで積分

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\,\vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\dot{\vec{p}} = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}(t=t_f) - \vec{p}(t=t_i) \equiv \Delta\vec{p}$$

$\vec{I}(t_i, t_f)$: $t_i \to t_f$ に質点に働いた力積(ベクトル)

保存力、ポテンシャル力 $\vec{F}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ となる $V(\vec{r})$ が存在、$V(\vec{r})$: ポテンシャルエネルギー

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ となること

$\vec{F}(x)$ とかいた

場所 $\vec{r}$ に質点が存在するとき $F(\vec{r})$ が働きなおかつ $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$V(\vec{r})$: $\vec{r}$ で として1つの実数値が定める

$\vec{\nabla}V$: ベクトル

$$\vec{\nabla}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\nabla}V)_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \partial_x V$$

$$(\vec{\nabla}V)_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \partial_y V$$

$$(\vec{\nabla}V)_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \partial_z V$$

$\vec{\nabla}$: 関数からベクトルをつくる演算子

$$(\vec{\nabla}V)_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial_i V \quad i = 1, 2, 3$$

No. Date

ex) バネ $\qquad -k(\vec{r}-\vec{r}_0)$

自然長 $\vec{r}_0$ $\qquad \vec{F} = -k|\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot \dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

$\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$: $\vec{A}$ 方向の単位ベクトル

$$\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\vec{\nabla}V$$

となる $V(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k|\vec{r}-\vec{r}_0|^2 = \frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)^2$$

としてみる.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = k(x-x_0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = k(y-y_0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = k(z-z_0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = k(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

確かに $\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\vec{\nabla}V$

Date . . No.

1D

$F = m\dot{v}$ $\quad \vec{F} = -\frac{dV}{dx}$

$Fv = m\dot{v}v = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}mv^2 = \frac{dk}{dt}, \quad k = \frac{1}{2}mv^2$

$t_i \to t_f$で積分

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, Fv = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{dk}{dt} = k(t=t_f) - k(t=t_i) \equiv \Delta k$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, Fv = \int_{t_i}^{t_f} dt\, F(x)\,\dot{x}(t)$$

もし $F = -\frac{dV}{dx}$ なら

$$= \int_{t_i}^{t_f} (-)\frac{dV(x(t))}{dt}\ \frac{dx(t)}{dt}\, dt$$

$$= -\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \frac{dV}{dx} = -V(t)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{dk}{dt} = k(t_f) - k(t_i) = \Delta k$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot\vec{v}\, dt, \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

$$= -\int_{t_i}^{t_f} (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{v}\, dt$$

$$= -\int_{t_i}^{t_f} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{\frac{\partial V(\vec{r}(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\Big)\, dt$$

$V(\vec{r}(t))$

$V(\vec{r}(t))$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ でのV, tごとに変数が定まる

No. Date

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$ となる

$V_{(x,y,z)}$：3変数の関数，$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の関数

$\vec{r}$が少し変化することを考える

$$\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r} = \begin{pmatrix} x+\delta x \\ y+\delta y \\ z+\delta z \end{pmatrix}$$ となった時は どれだけ変化？

復習

$y = f(x)$　　$\dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \to f'(x)$　$\delta x \to 0$

$\delta x \neq h$

$$f(x+\delta x) - f(x) = f'\delta x$$

$$\delta f = f'\delta x$$

$$\delta f = f'\delta x + \underbrace{\cdots}_{\delta x \to 0 \text{ のとき } 0 \text{ になる}}$$

δxの1次までとって

$$\delta f = f'\delta x \quad df = f'dx$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$V(x,y,z)$ をxだけの関数を考える

$$\delta V = V(x+\delta x, y, z) - V(x,y,z)$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \cdots$$

$\delta x \to 0$ で 0

Vをxとyの関数と考える

Date . . No.

$$\delta V = V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x,y,z)$$
$$= \left[V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x, y+\delta y, z)\right]$$
$$+ \left[V(x, y+\delta y, z) - V(x,y,z)\right]$$

$$V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x, y+\delta y, z)$$
$$= \frac{\partial V(x, y+\delta y, z)}{\partial x}\delta x$$ ← 少しずれた場所
$$= \left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\delta y\right)\delta x = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x$$

Vをx, y, zの変数

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z$$

δtでわる

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

$\delta t \to 0$

$$\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$V(x(t), y(t), z(t))$

$$\Delta K = \int_{t_i}^{t_f}(\vec{\nabla}V)\vec{v}\,dt$$
$$= -\int_{t_i}^{t_f}(\vec{\nabla}V)\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$
$$= -\int_{t_i}^{t_f}\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt}dt = -V(\vec{r}(t_f)) + V(\vec{r}(t_i))$$

No. Date

$\Delta K = -\Delta V \qquad \Delta V = V(P(t_f)) - V(P(t_i))$

$\Delta E = 0 \qquad E = K + V$

力学的エネルギー

ポテンシャルによる運動では

力学的エネルギーは保存する

// 不変

力学的エネルギー $K + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(P(t))$

は運動の定数である.

$f(x)$の変化

$$f(x+\delta x) = f(x) + f'\delta x + O(\delta x)$$

$A : O(\delta x)$とは $\frac{A}{\delta x} \to 0 \quad \delta x \to 0$で

$V(x, y, z)$: 多変数の関数に対して x, y, zの微小変化による変化dVは以下の通り

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$