20110851　九島 [illegible]

3次元

位置ベクトル　$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$(\vec{r})_i = x_i$

・ベクトルの大きさ $|\vec{r}|$

$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i$　アインシュタインの記法
$= x_i x_i$ (省略)

・内積 (ベクトルの内積)

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$　$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$

チルダー
$\tilde{\vec{A}} = (A_1, A_2, A_3) = {}^t\vec{A}$
$\vec{A}$の転置

行列のかけ算

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i = \tilde{\vec{A}}\vec{B} = (A_1 A_2 A_3)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$

内積 $= (\vec{A}, \vec{B})$ ってかくこともある

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$　　$\vec{r}(t)$：時刻tでの質点の位置ベクトル

$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$　速度ベクトル

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$　加速度ベクトル

運動方程式
$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$
$\vec{r} = \vec{r}(t)$に関する微分方程式
($\vec{r}(t)$は未知、$\vec{F}$は既知)

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$

$\vec{F}\cdot\vec{v} = m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}$ (内積をとる)

$$
\begin{aligned}
&= m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) \\
&= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2 \\
&= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \\
&= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2
\end{aligned}
$$

$v = |\vec{v}|$ = 速度

$K = \frac{1}{2}mv^2$: 運動エネルギー

— $\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v}$ について —

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}\dot{v}_1\\ \dot{v}_2\\ \dot{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dot{v}_1 v_1 + \dot{v}_2 v_2 + \dot{v}_3 v_3 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v}
\end{aligned}
$$

アインシュタインの記法でかくと

$$\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{v}_i v_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_i v_i \left(= \frac{1}{2}(\dot{v}_i v_i + v_i \dot{v}_i)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2$$

$\underbrace{\vec{F}\cdot\vec{v}}_{\text{仕事率}} = \frac{d}{dt}K$　　運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2$ の変化率は仕事率 $\vec{F}\cdot\vec{v}$ に等しい

$\underbrace{\vec{p} = m\vec{v}}_{\text{運動量ベクトル}} \Leftrightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mv_1\\ mv_2\\ mv_3\end{pmatrix}$

$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{p}$　　運動量ベクトルの変化率は力ベクトルに等しい

tについて$t_1 \to t_2$まで積分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \left[\vec{P}\right]_{t_1}^{t_2} = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta \vec{P}$$

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \Delta \vec{P}$$

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F}$$: $t_1 \to t_2$に働いた力積ベクトル

$\vec{I}(t_1, t_2)$が同じなら、$\vec{F}$は異なっていても$\Delta\vec{P}$は等しい。

保存力(ポテンシャル力)

$\vec{F}(t) = -\vec{\nabla} V$　　　　$\vec{\nabla}$: nabla gradient

$= -\mathrm{grad}\, V(\vec{r})$　　　　$\vec{r}$: 時刻tに質点のある位置ベクトル

となるとき$\vec{F}$を保存力という。

(Vが存在する)

力が力点の存在する場所で決まる。

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$ 偏微分!

偏微分 $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = \partial_1$

xで偏微分する　partial derivative

$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$　　∂ : dの仲間

多変する関数 $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\partial x}$$

y、zは定数と考えてxで偏微分

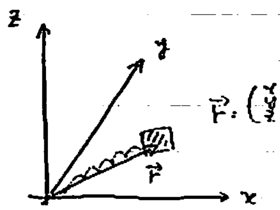
(ex) $\cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$

$\cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$

$\cdot \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0$

__保存力の例__

$\boxed{\text{バネ}}$



$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{r_0}$: 自然長

$$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r_0}) = -k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial y} V \\ \frac{\partial}{\partial z} V \end{pmatrix}$$ こんな V はある？

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2} k \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x - x_0)$$

$\parallel$

$\partial_x V$ ってかく

$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$

$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\mathrm{grad}\, V$$

$\vec{\nabla}$: 微分演算子からつくったベクトル

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} K$

$$\left(\quad = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V \right.$$

$$= -\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{dx_i}{dt} \partial_i V$$ → 力学的エネルギー保存則へ

$$= -\dot{x}_i \partial_i V$$