力学A レポート

物理1年1クラス　201110867　武井 皐

抵抗入りの強制振動

$m\ddot{x} = F \qquad F = \underbrace{-kx}_{復元力} \underbrace{-\xi v}_{抵抗力} + F_e \cos\Omega t$

$$\ddot{x} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x \underbrace{-\frac{\xi}{m}}_{-\gamma}\dot{x} + \underbrace{\frac{F_e}{m}}_{f_e}\cos\Omega t \Rightarrow \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = \underbrace{f_e\cos\Omega t}_{非斉次項}$$

$x = \mathrm{Re}\, z$

$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t}$ —— (*)

まず斉次解

$\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\omega_0^2 z = 0$ を考える。(斉次方程式)

$z = e^{\lambda t}$ としてみる。

$\dot{z} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$(\lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2)e^{\lambda t}=0 \qquad \lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2=0$ → 特性方程式

$\lambda = \lambda_\pm = \frac{1}{2}\{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}\}$

場合分けして考える。

① 抵抗が小さい時

$\gamma^2-4\omega_0^2 = -4\omega_0'^2 \qquad \omega_0' = \frac{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}}{2}$

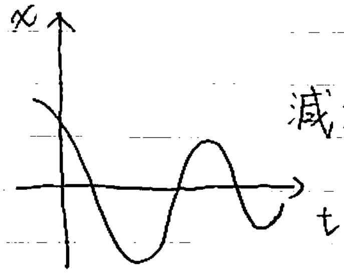
$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\{-\gamma\pm\sqrt{-4\omega_0'^2}\} = \frac{1}{2}\{-\gamma\pm i2\omega_0'\} = -\frac{1}{2}\gamma\pm i\omega_0'$

斉次解

$z = C_+e^{\lambda t}+C_-e^{\lambda t} = C_+e^{-\frac{\gamma}{2}t+i\omega_0't}+C_-e^{-\frac{\gamma}{2}t-i\omega_0't} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\{C_+e^{i\omega_0't}+C_-e^{-i\omega_0't}\}$

$x = \mathrm{Re}\,z = e^{-\frac{\gamma}{2}t}C_0\cos(\omega_0't+\theta_0)$ //

ここで、C_0, θ_0 はある定数



減衰振動

② 抵抗大 $\gamma > 2\omega_0$

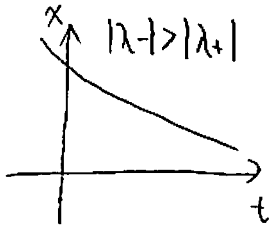
$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}\right\} < 0$$

$$z = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

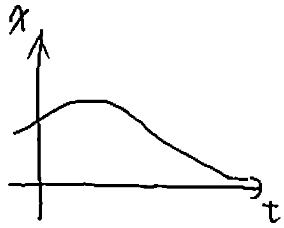
過減衰 (over damped)

$$x = \mathrm{Re}\, z = C_+' e^{-|\lambda_+|t} + C_-' e^{-|\lambda_-|t}$$

$$C_+' = |C_+| \ , \ C_-' = |C_-|$$



または



③ $\lambda^2 = 4\omega_0^2$ の時 (臨界減衰)

$$\lambda_+ = \lambda_- = \lambda_0 \qquad \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = (\lambda - \lambda_0)^2$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)z = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 z = 0$$

$z = e^{\lambda t}$ とせよ

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}$$ 一般の λ について

λ で微分

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t e^{\lambda t} = 2(\lambda - \lambda_0)e^{\lambda t} + (\lambda - \lambda_0)^2 t e^{\lambda t}$$

$\lambda = \lambda_0$ とおく。

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t e^{\lambda_0 t} = 0$$ $z = te^{\lambda_0 t}$ も斉次方程式の解。

一般解をつくるために

$e^{\lambda_+ t} = e^{\lambda_- t} = e^{\lambda_0 t}$ 1コ この他に $z = te^{\lambda_0 t}$ も斉次方程式の解 2コ

一般解

$$z = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t e^{\lambda_0 t} = e^{-|\lambda_0|t}(C_1 + C_2) \qquad C_1' = |C_1|$$

$$x = \mathrm{Re}\, z = e^{-|\lambda_0|t}(C_1' + tC_2') \longrightarrow 0 \ (t \to \infty)$$

$F_e = 0$ (外力なし)

$x \to 0$ $(t \to \infty)$ 振動はとまる。

外力があれば?

一般解 $= \underbrace{x_g}_{} + x_0$ $\quad x_0$: 特解

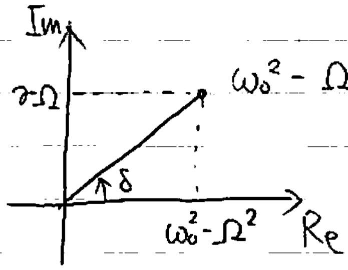
↑ 斉次方程式の一般解 $\to 0$ $(t \to \infty)$

$z_0 = Ae^{i\Omega t}$ としてみる。

$\ddot{z}_0 + \gamma\dot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = f_e e^{i\Omega t}$

$(-\Omega^2 + \gamma i\Omega + \omega_0^2) A e^{i\Omega t}$

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega}$$



$$\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega = \underbrace{|\omega_0^2-\Omega^2+i\gamma\Omega|}_{\Omega_0^2} e^{i\delta}$$

$$\Omega_0^2 = \sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}$$

$$x_0 = \mathrm{Re}\, z_0 = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

強制力がある時の一般解

$$x = x_g + \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t-\delta) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

抵抗力の行う仕事率 $(t\to\infty)$

$$w_\xi = -\xi v\cdot v = -\xi v^2 = -\xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2 \Omega^2 \underbrace{\sin^2(\Omega t-\delta)}_{=\frac{1}{2}(1-\cos 2(\Omega t-\delta))}$$: 振動する

$\longrightarrow \frac{1}{2}$ (平均して)

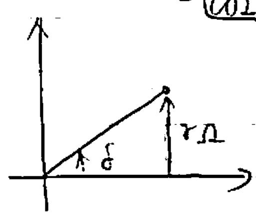
$A = \dfrac{1}{\Omega_0^2 e^{i\delta}}$, $z_0 = \dfrac{1}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t-\delta)}$

$\Omega : 0 \to \omega_0 \to \infty$

$\delta : \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\delta} \to \frac{\pi}{2} \to \pi$

$$w_e = F_e\cos\Omega t \cdot v$$
$$= F_e \cos\Omega t\left[-\frac{f_e}{\Omega_0}\Omega\sin(\Omega t-\delta)\right] = -\frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\Omega \underbrace{\cos\Omega t\cdot\sin(\Omega t-\delta)}$$
$$\boxed{\cos\Omega t\cdot\sin\Omega t}\cos\delta - \boxed{\cos\Omega t\cdot\cos\Omega t}\sin\delta \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\overline{w_e} = \frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2} = m\frac{f_e^2}{\Omega_0^2}\cdot\frac{\Omega}{2}\frac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2}$$
$$= \xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\frac{1}{2} = -\overline{w_\xi}$$



外力がした仕事は抵抗力が行う仕事となった。

❀ 3次元の質点の運動

質点の運動？

世界線を定める $\longrightarrow$ $\overbrace{(3+1)}^{4}$ 次元の中の線

時刻tでの質点の座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$$

時刻tごとに $\vec{r}(t)$ が定まる。

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$ 位置ベクトル　時刻tごとにベクトルが定まる。

速度ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$

$v_x(t) = \dot{x}(t)$

$v_y(t) = \dot{y}(t)$

$v_z(t) = \dot{z}(t)$

加速度ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$

$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t)$

$a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t)$

$a_z(t) = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)$

$x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3$

$(\vec{r})_i = x_i \quad i = 1, 2, 3$　　$\underset{\underset{v_i}{\shortparallel}}{(\vec{v})_i} = \dot{x}_i$　　$(\vec{a})_i = a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i \quad i = 1, 2, 3$

運動の法則

Newton eq.

$$\underset{\text{力ベクトル}}{\underbrace{\vec{F}}} = m\vec{a}$$

$\vec{a}, \vec{F}$: ベクトル（向きと大きさ）

$(\vec{F})_i = F_i \quad i = 1, 2, 3$

$F_x = F_1,\ F_y = F_2,\ F_z = F_3$

$F_i = ma_i = m\ddot{x}_i$　F_i が与えられたと考えると

＊ 3つの連立微分方程式

まとめて $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$

ベクトルに関する微分方程式

㋹ ベクトルの大きさ

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$　$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3}$

$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i = x_i x_i$　同じ添字が2回でてきたら和をとる

$\sum_{i=1}^{3}$ を省略

Einsteinの記法