201110860　佐藤 拓磨

I.

I-1. $F = ma$ の両辺に $\dot{x}$ をかけると

$F \cdot v = m \cdot \ddot{x} \dot{x}$

$\therefore$ $F \cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right)$

ここで

$T = \frac{1}{2} m v^2$ とおくと

$F v = \frac{d}{dt} T$ 〃

I-2. $F = mg$ は

$F = -\frac{d}{dx}(mgx)$ とかけるので保存力であり.

$V(x) = mgx$ である.

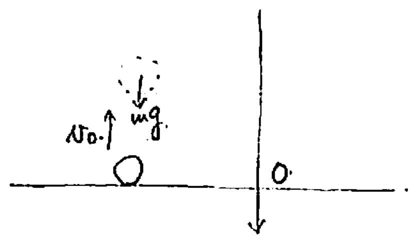
I-3. 運動方程式より

$m\alpha = mg$

であるから.

$\dot{x} = gt - v_0$

$x = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t$ 〃



I-4 I-1の左辺は.

$mg \times v = mg(gt - v_0)$

一方右辺は.

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (gt - v_0)^2$ より.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m \, 2 g (gt - v_0)$

$= mg(gt - v_0)$

よって I.1 の関係式は成り立つ.

I-5 運動エネルギーを $K(x)$ とおくと ($K(x) \geqq 0$).

次の関係式が成り立つ.

$E = V(x) + K(x)$

よって.

$E - V(x) = K(x)$

となり

$K(x) \geqq 0$ なので

$E - V(x) \geqq 0$ である.

したがって.

領域 R には質点は決して立ち入らない。

II.1.
$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t} \\ \ddot{z}_0 = A(i\Omega)^2 e^{i\Omega t} \end{cases}$$ であるから

$$(-A\Omega^2 + \gamma \cdot A i\Omega + A\omega_0^2)e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$$

$$\therefore\ A = \frac{f_e}{(\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega}$$

II-2.
I.1より $z_0 = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega}\, e^{i\Omega t}$

ここで $\Omega_0^2 e^{i\delta} = (\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega$ とおくと、

$$z_0 = \frac{f_e}{\Omega_0^2 \cdot e^{i\delta}}\, e^{i\Omega t} = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\, e^{i(\Omega t-\delta)}$$

したがって

$$x_0 = \mathrm{Re}\ z_0 = \frac{f_e}{\Omega_0} \cos(\Omega t-\delta)$$

II-3.
$z = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases}$$ より

$$(\lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2)\cdot e^{\lambda t} = 0$$

となるので、特性方程式 $\lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2=0$ を解くと

$$\therefore\ \lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}}{2}\quad //$$

II-4.
$\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2} = i\cdot 2\omega_0 \sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}$ であるから

$\gamma < 2\omega_0$ のとき、

$\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2} \fallingdotseq 2i\omega_0'$ と表せる

したがって

$$\lambda = \left(-\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0'\right)t$$

$$\therefore\ z = C_1 e^{(-\frac{\gamma}{2}+i\omega_0')t} + C_2 e^{(-\frac{\gamma}{2}-i\omega_0')t}$$
$$= C_1 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cdot(\cos\omega_0't + i\sin\omega_0't) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cdot(\cos\omega_0't - i\sin\omega_0't)$$

よって

$$x = \mathrm{Re}\,z = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\cos\omega_0't + C_2\cos\omega_0't)$$

となり、

$$C_1\cos\omega_0't + C_2\cos\omega_0't = \frac{1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(\omega_0't+\theta')\qquad (\theta'：定数)$$

$\dfrac{1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = C$ （C：定数） とおくと

$$x = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0't+\theta')$$

II.5. まず $\gamma > 2\omega_0$ のとき.

$\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$ かつ $|-\gamma| > |\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}|$ であるから.

$\lambda_\pm < 0$ である.

よって

$$x = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

$$= (C_+ + C_-) e^{-i\omega_0 t}$$

これは. 振動はすることなく, 減少する.

II.6. $\Omega_0^2 \cdot e^{i\delta} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega \qquad \left(\Omega_0^2 = \sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \right)$

$$e^{i\delta} = \frac{1}{\Omega_0^2}\left((\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega \right) \quad —(*)$$

また

$e^{i\delta} = \cos\delta + i\sin\delta$ で

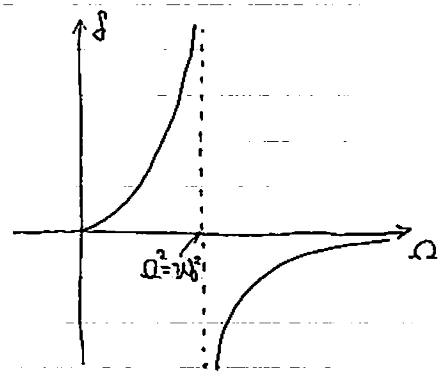
(*) の両辺を比べて

$$\begin{cases} \cos\delta = \dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega_0^2} \\ \sin\delta = \dfrac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2} \end{cases}$$

より

$$\tan\delta = \frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

$$\delta = \mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$



Ⅲ.

Ⅲ-1.

$x=e^{\lambda t}$ とおくと、

$(\lambda^2-2\lambda+3)e^{\lambda t}=0$

$\therefore\ \lambda=1\pm i\sqrt{2}$

$\therefore\ x=C_1e^{(1+i\sqrt{2})t}+C_2e^{(1-i\sqrt{2})t}$ // $(C_1, C_2$：定数$)$

Ⅲ-2.

$x=e^{\lambda t}$ と仮定すると、

与式は、

$(\lambda^2-2\lambda+1)e^{\lambda t}=0$

となり

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ をとくと

$\therefore\ \lambda=1$

Ⅲ-3.

両辺を λ で微分すると

$t\cdot(D-1)^2\cdot e^{\lambda t}=2(\lambda-1)e^{\lambda t}+(\lambda-1)^2t\cdot e^{\lambda t}$

右辺に $\lambda=1$ を代入すると

$(D-1)^2(te^{\lambda t})=0$

Ⅲ-4.

Ⅲ.3 より $(D-1)^2\cdot(te^{\lambda t})=0$ より

斉次方程式の解として、 $x=\mathrm{Re}\,z$ としたとき

$z=e^t$ と $z=t\cdot e^t$ が考えられる $(\because\ \lambda=1)$

$\therefore\ z=C_1e^t+C_2t\cdot e^t$ $(C_1, C_2$：定数$)$

$\therefore\ x=\mathrm{Re}\,z=C_1e^t+C_2te^t$

Ⅲ-5.

$r=2w_0$ のとき、

特性方程式 $\lambda^2+r\lambda+w_0^2=0$ は

$(\lambda+w_0)^2=0$ $(\lambda_+=\lambda_-=-w_0$ とおくと$)$ と表せる。

また Ⅲでの議論より

$(\lambda+w_0)^2\cdot te^{-w_0t}=0$

となり、

$z=C_1e^{-w_0t}+C_2\cdot te^{-w_0t}$ $(C_1, C_2$：ある定数$)$

であるから

$x=\mathrm{Re}\,z=e^{-|w_0|t}(C_1'+tC_2')$ $(C_1'=|C_1|, C_2'=|C_2|)$

また $t\to\infty$ としたとき $x\to0$ となるので、

$x=e^{-|w_0|t}(C_1'+tC_2')$

は振動することが示された。