演習問題　20110858　佐々木さゆり

I. $F=ma$ の帰結について

1. Newton eq. $F = ma \cdots$ (☆)　$(a = \dot{v})$

(☆)の両辺に v をかけると、 $Fv = m\dot{v}\cdot v$

$$= \frac{dv}{dt}\cdot mv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\cdot m$$

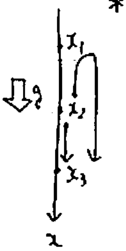
$$= \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{2}mv^2 = \dot{T}$$

2. ∴ 保存力である。

∵ $\underbrace{F = mg = -\frac{d}{dx}V(x)}_{\cdots(*)}$ となる $V(x)$ を考える。

$(*)$ の両辺を x で積分すると $\int mg\,dx = -\int \frac{d}{dx}V(x)\,dx$　∴ $V(x) = -mgx + C$ (C:積分定数

*「保存力」との根拠



外力 $f\,(=-mg)$ を加えて静かに動かした仕事を考える

$$W_1 = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = -mg(x_1-x_2) - mg(x_3-x_1) = -mg(x_3-x_2) \cdots ①$$

$$W_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = -mg(x_3-x_2) \cdots ②$$　①,②より $W_1 = W_2$

よって $f(x)$ の仕事は経路によらず一定であると分かる。したがって、重力($=mg$)は保存力。

3. $ma = mg$　∴ $a = g$

⇒ $v = \int g\,dt = gt + v_0$　($t=0$ のときの $v = v_0$)

⇒ $x = \int v\,dt = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t + x_0$　($t=0$ のときの $x = x_0$) とする

今、$x_0 = 0$ であるから、 $x = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t$

4. $v(t) = gt - v_0$ だから、 $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gt-v_0)^2$　$(g^2t^2 - 2gt\cdot v_0 + v_0^2)$

微分して $\dot{T} = \frac{1}{2}m(2g^2t - 2gv_0) = mg(gt - v_0) = Fv$

5. 運動エネルギー K は負にならないので $K \geqq 0$，またポテンシャル $V(x)$ の質点の運動を考えたとき、 $E = V(x) + K$

$$E - V(x) = \{V(x) + K\} - V(x) = K \geqq 0$$

なので x の領域 $R = \{R \mid E - V(x) < 0\}$ には立ち入らないことが証明された。

Ⅱ. 速度vに比例する抵抗力 ξv をうける時の強制振動は次の運動方程式に従う。

$$m\ddot{x} = -kx - \xi v + F_e \cos \Omega t \quad \cdots\cdots (*)$$

これを $x = \mathrm{Re}\, z$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\gamma = \frac{\xi}{m}$, $f_e = \frac{F_e}{m}$ として、$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t}$ と書く。

$\cdots\cdots (**)$

1. 特解を $z_0 = Ae^{i\Omega t}$ の形で仮定し A が $A = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega}$ となることを示す。

$z_0 = Ae^{i\Omega t}$ より $\dot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t}$ $\ddot{z}_0 = A(i\Omega)^2 e^{i\Omega t} = -A\Omega^2 e^{i\Omega t}$ であるから

$(**)$は $-A\Omega^2 e^{i\Omega t} + \gamma \cdot A(i\Omega)e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \cdot Ae^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$

$\{-\Omega^2 + \gamma(i\Omega) + \omega_0^2\} Ae^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$ と表される。

これを $-\Omega^2 + \gamma(i\Omega) + \omega_0^2 \neq 0$ として Aについて解くと、

$e^{i\Omega t} \neq 0$ より $A = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega}$ となる。

2. $\Omega_0^2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$, $\Omega_0^2 e^{i\delta} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega$ とおいて、特解が $x_0 = \mathrm{Re}\, z_0 = \dfrac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$ となることを示す。(Ω_0は実数)

1より $A = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega} = \dfrac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}}$ であるから、

$$z_0 = Ae^{i\Omega t} = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}} e^{i\Omega t} = \frac{f_e}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t - \delta)}$$

ここでオイラーの公式より $= \dfrac{f_e}{\Omega_0^2}\left\{\cos(\Omega t - \delta) + i\sin(\Omega t - \delta)\right\}$

x_0は z_0 の実部なので $x_0 = \dfrac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$

3. $z = e^{\lambda t}$ とおいて斉次方程式に代入し、λが $\lambda = \lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$ となることを示せ。

$z = e^{\lambda t}$ より $\dot{z} = \lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ であるから。

$(**)$は $\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \cdot \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$

$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$

$e^{\lambda t} > 0$ なので $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$

解の公式より $\lambda = \lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

2. 摩擦が小さいとき ($\gamma < 2\omega_0$) 斉次解は次のように振動しながら減衰することを示せ。(減衰振動)
ただし, $\omega_0' = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2} < \omega_0$ である。 $x = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0' t + \theta')$, C, θ' はある定数。

Ⅱ.3より $\lambda = \lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \dfrac{-\gamma \pm 2\omega_0' i}{2}$ ($\because \gamma < 2\omega_0$)

よって, $z = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t} = C_1 e^{\frac{(-\gamma + 2i\omega_0')t}{2}} + C_2 e^{\frac{(-\gamma - 2i\omega_0')t}{2}}$

$= C_1 \times e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\omega_0' t} + C_2 \times e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{-i\omega_0' t} = C_1 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cos\omega_0' t + i\sin\omega_0' t) + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}(\cos(-\omega_0' t) + i\sin(-\omega_0' t))$

$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\cos\omega_0' t + C_2\cos(-\omega_0' t)) + i e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\sin\omega_0' t + C_2\sin(-\omega_0' t))$

x は z の実部なので $x = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\cos\omega_0' t + C_2\cos(-\omega_0' t))$

これを合成して $x = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0' t + \theta')$ となる。

3. 摩擦が大きいとき ($\gamma > 2\omega_0$) $\lambda_\pm < 0$ を示し, 斉次解が次のように振動せず減衰することを確認せよ。(過減衰)

$$x = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

Ⅱ.3より $\lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$ 今, $\gamma > 2\omega_0$ なので $0 < \gamma^2 - 4\omega_0^2 < \gamma^2$

$0 < \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} < \gamma$ であるから,

$\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} - \gamma < 0$ となる

よって, $\lambda_+ = \dfrac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} < 0$ また, $\lambda_- = \dfrac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} < 0$ は明示

よって, $z = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} = C_+ e^{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}t} + C_- e^{\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}t} = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$

x は z の実部であるが、今, z は虚部をもたないので

$$x = z = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

4. 以上いずれにせよ $\gamma \neq 0$ であるかぎり, 斉次解は時間がたてば減衰してしまうので十分時間がたてば,
$x \to \dfrac{f_0}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$ のように振動は非斉次解のみとなる。Ω の関数として遅れ δ を $\Omega : 0 \to \infty$ で図示せよ。

$\Omega_0^2 e^{i\delta} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega$ より

$e^{i\delta} =$ ~~$\cos\delta + i\sin\delta$ となり~~, $\dfrac{1}{\Omega_0^2}\{(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\gamma\Omega\}$

またオイラーの公式より

$e^{i\delta} = \cos\delta + i\sin\delta$ であるから, $\cos\delta = \dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega_0^2}$ $\sin\delta = \dfrac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2}$ となり

$\tan\delta = \dfrac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ とできる。したがって $\delta = \mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$

$\Omega \rightleftarrows 0$ のとき $\tan\delta = 0$ となるので $\delta = 0$

$\Omega^2 = \omega_0^2$ のときは $\tan\delta$ の分母が 0 となり無限大へとぶ

($\Omega^2 \to \omega_0^2 + 0$ のとき $+\infty$, $\Omega^2 \to \omega_0 - 0$ のとき $-\infty$)

$\Omega \to \infty$ のとき $\tan\delta \to 0$ となり 左の グラフ のようになる。
(ただし, このとき $\tan\delta < 0$ なので $\delta \leq 0$ のはんいで)

III $D=\frac{d}{dt}$ としたとき、関数 $x=x(t)$ に関する線形常微分方程式について議論しよう。

1. $(D^2-2D+3)x=0$ の一般解を求めよ。

$$D^2-2D+3=0 \Rightarrow D=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=1\pm\sqrt{2}i$$

$$\underline{x=C_1e^{(1+\sqrt{2}i)t}+C_2e^{(1-\sqrt{2}i)t}} \quad (C_1, C_2 \text{ はある定数})$$

2. $\underset{\cdots(*)}{(D^2-2D+1)x=0}$ において $x=e^{\lambda t}$ を仮定して、λ を求めよ。

$x=e^{\lambda t}$ より $\frac{d}{dt}x=\lambda e^{\lambda t}$, $\frac{d^2}{dt^2}x=\lambda^2e^{\lambda t}$ なので

$$(*)=(\lambda^2-2\lambda+1)e^{\lambda t}=0$$

$e^{\lambda t}>0$ なので $\lambda^2-2\lambda+1=0$

$$(\lambda-1)^2=0$$

$$\therefore \lambda=1$$

3. $(D-1)^2e^{\lambda t}=(\lambda-1)^2e^{\lambda t}$ の両辺を λ で微分しそのあとで $\lambda=1$ とおくことで $(D-1)^2(te^{\lambda t})=0$ を導け。

$$\overset{\lambda\text{で微分}}{\Rightarrow} (D-1)^2\cdot te^{\lambda t}=(2\lambda-2)e^{\lambda t}+(\lambda^2-2\lambda+1)\lambda\cdot e^{\lambda t}$$

$\lambda=1$ を代入すると

$$(D-1)^2\cdot te^{\lambda t}=0$$

4. $(D^2-2D+1)x=0$ の一般解を求めよ。

$$D^2-2D+1=0 \Rightarrow (D-1)^2=0$$

よって、$D=1$ で

$$x=e^{1\cdot t}=\underline{e^t}$$

5. ここでの議論に従ってIIで $\gamma=2\omega_0$ の時の一次解を書き下し、これも時間とともに減衰することを示せ。(臨界減衰)

$z=e^{\lambda t}$ とおくと $\dot{z}=\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{z}=\lambda^2e^{\lambda t}$ となり、また $\gamma=2\omega_0$ より

$$\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\omega_0^2z=\lambda^2e^{\lambda t}+2\omega_0\cdot\lambda e^{\lambda t}+\omega_0^2e^{\lambda t}$$

$$=(\lambda^2+2\lambda\omega_0+\omega_0^2)e^{\lambda t}=0$$

$e^{\lambda t}>0$ より $\lambda^2+2\lambda\omega_0+\omega_0^2=0$ $\quad\therefore \lambda=\frac{-2\omega_0\pm\sqrt{4\omega_0^2-4\omega_0^2}}{2}=-\omega_0$

よって、$x=z=e^{-\omega_0 t}=\frac{1}{e^{\omega_0 t}}$ $\quad t\to\infty$ のとき $\frac{1}{e^{\omega_0 t}}\to 0$ なので

$x=\frac{1}{e^{\omega_0 t}}$ は時間とともに減衰する。