$F = F(t)$ ：時刻tに質点に働く力

$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ （$x = x(t)$ ：時刻tでの質点の位置）

$v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ：時刻tでの質点の速度

$a = a(t) = \frac{dv}{dt}$ ：時刻tでの質点の加速度

以上の前提から、何が導かれるか.

運動方程式

$$F(t) = m\ddot{x}(t)$$

より.

(1). 両辺に $\dot{x}(t)$ をかける

$\therefore$

$$F(t)\cdot\dot{x}(t) = m\ddot{x}\cdot\dot{x}$$

ここで

$$\ddot{x}\cdot\dot{x} = \dot{v}\cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

なので.

$$F(t)\cdot\dot{x}(t) = m\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

i.e.

$$\underline{F(t)\cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$ となる.

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 & ：運動エネルギー \\ F\cdot v & ：仕事率 \end{cases}$$

と定義すると.

$$\frac{d}{dt}K = F\cdot v$$

［運動エネルギーの時間変化は仕事率に等しい。］

・上の等式について, $t_1 \to t_2$ まで積分する。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\cdot\frac{dK}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt\cdot(F\cdot v)$$

ここで

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\cdot\frac{dK}{dt} = K(t_2) - K(t_1)$$

（$K(t)$；時刻tでの運動エネルギー）

NO.

DATE . .

また、$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot Fv = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot F(t) \cdot \frac{dx}{dt}$

(ここで

$F(t) = \tilde{F}(x(t))$ とかけるとすると

[時刻tにある質点の位置 x を求めると、その時の質点に働く力が $\tilde{F}(x)$ と求まるような関数])

$$= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{F}(x(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt$$

$$= \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx \cdot \tilde{F}(x)$$

$x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2$ とおく

$$= \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}(x)\, dx$$

← 質点が受けとった仕事

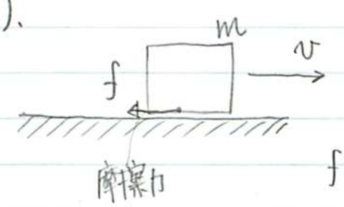
$$\equiv W(x_1 \rightarrow x_2)$$

であるから、

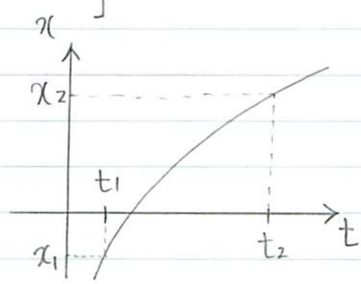
$$K(t_2) - K(t_1) = W(x_1 \rightarrow x_2)$$

[運動エネルギーの変化分は質点がなされた仕事に等しい。]

例)、



f:静止するまで一定



上の図より、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -f \\ \dot{x} = v = -\frac{f}{m}t + v_0 & (v_0:\text{定数}) \\ x = -\frac{f}{2m}t^2 + v_0 t + x_0 & (x_0:\text{定数}) \end{cases}$$

よって、

$$v_1 = -\frac{f}{m}t_1 + v_0 \quad , \quad v_2 = -\frac{f}{m}t_2 + v_0$$

また

$$x_1 = -\frac{f}{2m}t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 \quad , \quad x_2 = -\frac{f}{2m}t_2 + v_0 t_2 + x_0$$

であるから、

$$x_2 - x_1 = -\frac{1}{2}\frac{f}{m}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)$$

今は
$$\int_{x_1}^{x_2} dx \cdot (-f) = -f(x_2 - x_1)$$ が仕事であるから

$$K(t_2) - K(t_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \frac{m}{2}\left[\left(-\frac{f}{m}t_2 + v_0\right)^2 - \left(-\frac{f}{m}t_1 + v_0\right)^2\right]$$
$$= \frac{m}{2}\left[\frac{f^2}{m^2}(t_2^2 - t_1^2) - \frac{2f}{m}v_0(t_2 - t_1)\right]$$
$$= f \cdot \frac{f}{2m}(t_2^2 - t_1^2) - f v_0 (t_2 - t_1)$$
$$= -f\left[\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{f}{m}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)}_{= x_2 - x_1}\right]$$

以上まとめると
$$K(t_2) - K(t_1) = -f(x_2 - x_1)$$ となる.

一般には,
$$\Delta K = W$$
$$\begin{cases} \Delta K = K(t_2) - K_1(t_1) \\ W = w(x_1 \to x_2) \end{cases}$$
と書き,
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = Fv \ : \text{仕事率}$$ と表せる

○ Newton eq. より.
$$m\ddot{x} = F, \quad \dot{x} = v, \quad P \equiv mv \quad (P: \text{運動量})$$

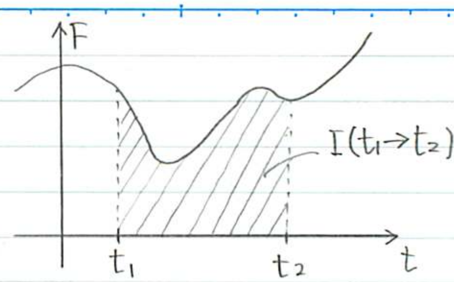
とすると.
$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt} m \cdot v = \frac{d}{dt} P$$
であるから
$$\frac{dP}{dt} = F$$ (運動量の変化が力に等しい)

上記の式を $t_1 \to t_2$ まで積分すると
$$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dP}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F = I(t_2 - t_1)$$ (I: $t_1 \to t_2$ までに質点に働いた力の"力積")

NO.

DATE . .

また、$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dP}{dt} = P(t_2) - P(t_1) = \Delta P$



以上 まとめると、

$\underline{\Delta P = I}$

(運動量変化が力積に等しい)

以上の事柄は、

完全に一般の状況

↳ つまり、特に状況を仮定しなくても成立つということ。

○ 一方，特殊な状況として

$F(t) = -\frac{d\,V(x)}{dt}$ となる $V(x)$ が存在するとき

(ただし，$x = x(t)$)

F：保存力 (ポテンシャル力) という

◦ <u>保存力の大事な性質</u>

どんなときでも同じ位置では同じ力が働く.

つまり、

$x = x(t_1) = x(t_2)$ において、

t_1, t_2 という異なる時刻でも同じ位置 x にあれば

$F(t_1) = F(t_2) = -\frac{dV(x)}{dt}$

、$\frac{dK}{dt} = Fv = -\frac{dV}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$ において、

$t_1 \to t_2$ まで積分すると、

$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dK}{dt} = -\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ となる.

ここで $\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dK}{dt} = \Delta K$

NO.

DATE . .

また、
$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx} \cdot dx$$
$$= -\int_{x_1}^{x_2} dV(x) = -(V(x_2) - V(x_1))$$
$$= -\Delta V$$

$\therefore \quad \Delta K = -\Delta V$

よって
$\Delta(K+V) = 0$ となり

ここで
$E = K + V$ とおくと、
$\Delta E = 0$ であり、 E : 力学的エネルギー という。

・ 力学的エネルギーは運動の前後で不変。

このように、
運動の間，不変な物質量を

- 不変量 (invariant)
- 保存量 (conserved quantity)
- 運動の定数 (constant of motion)

などという。

LOOSE LEAF L1201 6mm×36lines maruman

NO.

DATE