Date 2011・4・28 No. 5

学籍番号 20110843 大山 侑太

< 1次元の質点の運動 >

Newton eq.

$$F = ma$$ (→実験事実から導かれたもの (整合的に実験事実を説明できる))

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$F = F(t)$: 時刻tに質点に働く力
$x = x(t)$: 〃 位置
$v = v(t)$: 〃 速度
$\left(v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right)$
$a = a(t)$ 〃 加速度

◎運動エネルギー

$$F(t) = m\ddot{x}$$

$$\downarrow \times \dot{x}(t)$$

$$F(t)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$\ddot{x}\dot{x} = \dot{v}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

↑ 合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2v^{2-1}\cdot\frac{dv}{dt} = v\cdot\dot{v}$$

(つまり $v\cdot(\dot{v}) \xrightarrow[\text{積分}]{} \frac{1}{2}v^2$ となることから)

よって

$$F(t)\dot{x}(t) = m\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$F(t)v = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2$$

$K = \frac{1}{2}mv^2$: 運動エネルギー, Fv : 仕事率 であるから

$$\frac{d}{dt}K = Fv$$ (運動エネルギーの時間変化は仕事率に等しい)

↳ Newton eq. の帰結

No. Date

これをtについて $t_1 \to t_2$ まで積分する

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{dk}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F v$$

左辺について

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} k = k \Big|_{t_1}^{t_2} = k(t_2) - k(t_1)$$

($k(t)$：時刻tでの運動エネルギー)

右辺について

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, F v = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot F(t) \cdot \frac{dx}{dt}$$

"tilder"と呼ぶ

ここで $F(t) = \tilde{F}(x(t))$ とする
($\to$ Fとは異なる関数)

$\tilde{F}(x(t)) = F(t)$：時刻tにある質点の位置xを決めると
その時の質点に働く力が $\tilde{F}(x)$ で決まる
ような関数

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, F(t) \frac{dx}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{F}(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \tilde{F}(x)\, dx$$

置換積分の公式

$x(t_1) = x_1$ とすると

$$与式 = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}(x)\, dx}_{\text{質点が受けとった仕事}} = W(x_1 \to x_2)$$

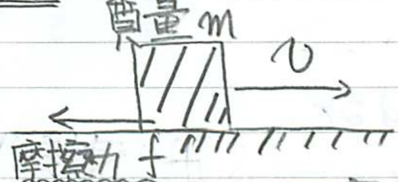
よって

$k(t_2) - k(t_1) = W(x_1 \to x_2)$

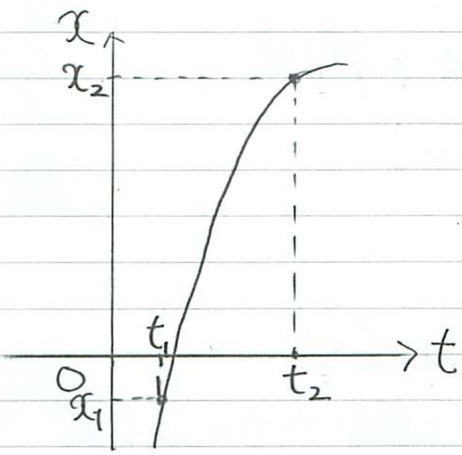
運動エネルギーの変化分は質点になされた仕事に等しい

$\hookrightarrow$ Newton eq の帰結

例



(静止するまで一定)



Newton eqより

$$m\ddot{x} = -f$$

$$\ddot{x} = -\frac{f}{m}$$

積分

$$\underset{(v)}{\dot{x}} = -\frac{f}{m}t + \underset{\text{定数}}{v_0}$$

左図より

$$v_1 = -\frac{f}{m}t_1 + v_0$$

積分

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{m}t_1^2 + v_0 t_1 + x_0$$

$$v_2 = -\frac{f}{m}t_2 + v_0$$

積分

$$x_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{m}t_2^2 + v_0 t_2 + x_0$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{f}{2m}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1) \quad \cdots ①$$

$$\int_{x_1}^{x_2}(-f)\,dx = -f(x_2 - x_1) \quad (\because -f\text{は定数})$$

運動エネルギーの変化について

$$K(t_2) - K(t_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\left(-\frac{f}{m}t_2 + v_0\right)^2 - \left(-\frac{f}{m}t_1 + v_0\right)^2\right\}$$

$$= f\left\{\frac{f}{2m}(t_2^2 - t_1^2) - v_0(t_2 - t_1)\right\}$$

$$= -f\left\{\underbrace{-\frac{f}{2m}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)}_{\substack{\parallel\ ①\text{より} \\ x_2 - x_1}}\right\}$$

$$\therefore\ K(t_2) - K(t_1) = -f(x_2 - x_1)$$

よって $\Delta K = W$

◦ 運動量

Newton eq より　$m\ddot{x} = F$

$\dot{x} = v$, $p = mv$ (運動量) とすると

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = \frac{d}{dt} mv = \frac{d}{dt} p$$

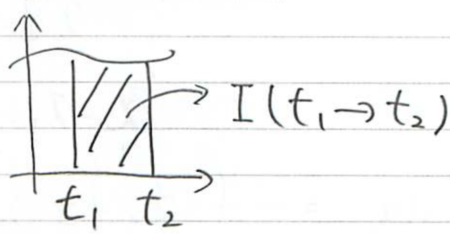
$\therefore$ $\frac{d}{dt} p = F$ $\Leftrightarrow$ Newton eq と同値

(= 運動量の変化が力に等しい)

これを $t_1 \to t_2$ まで積分すると

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dp}{dt}}_{= \Delta p} = \int_{t_1}^{t_2} dt F = \underbrace{I(t_1 \to t_2)}_{=}$$

$t_1 \to t_2$ まで質点に働いた力の"力積"



よって　$\Delta p = I$

(= 運動量の変化が力積に等しい)

Date . . No.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & F = ma & \\ \swarrow\nearrow & & \nwarrow\searrow \\ \Delta K = W & \longleftrightarrow & \Delta P = I \end{array}}$$

以上は完全に一般の状況

特殊な状況として

$F(t) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$ となる $V(x)$ が存在するとき

Fを"保存力"という

(ポテンシャル力ともいう)

→どんな時でも同じ場所では同じ力が働く

$x = x(t_1) = x(t_2)$ のとき

$$F(t_1) = F(t_2) = -\frac{dV(x)}{dt}$$

例 ① 重力 ○

② 摩擦力 ×

Fが保存力のとき

$$\frac{dK}{dt} = Fv = -\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{であるから}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dK}{dt} = -\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\overset{\shortparallel}{\Delta K} = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx}\,dx$$

$$= -V(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\left(V(x_2) - V(x_1)\right)$$

$$= -\Delta V$$

よって

$$\Delta K = -\Delta V \iff \Delta(K+V) = 0$$

No. Date

$E = K + V$ とすると

$\Delta E = 0$ （E：力学的エネルギー）

⇒ 力学的エネルギーは運動の前後で不変

運動の間、不変な物理量　不変量(invariant)
保存力(conserved quantity)
運動の定数(constant of motion)