力学A REPORT # 201110852 工藤咲子

微分方程式

2階の常微分方程式 …ex)… $\ddot{x}+\omega^2 x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

$$\underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]}_{\fallingdotseq L}x=0$$

$L[x]=0$: 斉次方程式

$\boxed{x=x(t)\text{にLが作用する. L: 微分演算子}}$ c.f. $f(x)=0$

解を探してくる: $x=x_1(t)=\cos\omega t$

$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2 x_1=0$ より、 $L[x_1]=0$

$x=x_2(t)=\sin\omega t$

$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega^2 x_2=0$ より. $L[x_2]=0$

任意の定数 C_1, C_2 に対して、

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$
$$=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$$ も解

∵) $\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1+C_2x_2)+\omega^2(C_1x_1+C_2x_2)=0$ より.

$$L[C_1x_1+C_2x_2]=0$$

⇓

$L[x_i]=0$ $(i=1,2)$ のとき

$$L[C_1x_1+C_2x_2]=L\left[\sum_i C_ix_i\right]=0$$

└ Lの線型性, 重ね合わせの原理

$x=C_1x_1+C_2x_2$ (C_1, C_2:任意定数)

…任意定数を2つ含む解—— 一般解 , L: 2階の微分演算子

単振動では… 「どんな運動か?」「C_1, C_2はどのように決定するか?」

$$\boxed{x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t}$$

t=0での位置 x_0
t=0での速度 v_0 } と、初期条件を定めると、

$$x(0)=C_1\underbrace{\cos\omega\cdot 0}_{=\cos 0=1}+C_2\underbrace{\sin\omega\cdot 0}_{=\sin 0=0}=C_1=x_0$$

また、$v(t)=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$ より.

$$v(0)=-C_1\omega\sin\omega\cdot 0+C_2\omega\cos\omega\cdot 0=\omega C_2=v_0$$

$$\therefore C_2=\frac{v_0}{\omega}$$

$$\boxed{\therefore x=x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$ …初期条件を満たす解

2つ

NO. 4-②
DATE 4・26・X3

オイラーの公式

$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$　「複素数の指数関数」

∵) $e^{i\theta}$とは？

$x = x(\theta) = e^{i\theta}$ とすると、

$\frac{d}{d\theta}x(\theta) = ie^{i\theta} = ix(\theta)$, $\frac{d^2}{d\theta^2}x(\theta) = i^2e^{i\theta} = i^2x(\theta) = -x(\theta)$

ここで、$\theta=0$とすると、

$x(0) = e^0 = 1$

$\frac{d}{d\theta}x(\theta)\Big|_{\theta=0} = ix(0) = i\cdot 1 = i$

∴ $x = e^{i\theta}$は、$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + w^2\right)x = 0$,　　$i^2 + 1 = 0$

$x(0) = 1$, $\frac{d}{d\theta}x\Big|_{\theta=0} = i$ となる関数

一方、$y = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると、

$\frac{d}{d\theta}y = -\sin\theta + i\cos\theta$, $\frac{d^2}{d\theta^2}y(\theta) = -\cos\theta - i\sin\theta = -y(\theta)$

ここで、$\theta = 0$ とすると、

$y(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$\frac{d}{d\theta}y\Big|_{\theta=0} = -\sin 0 + i\cos 0 = i$

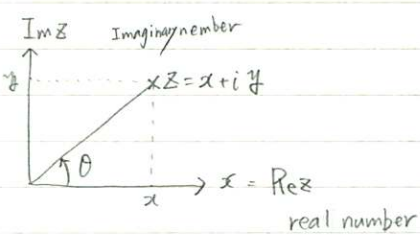
∴ $y = \cos\theta + i\sin\theta$は、$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + w^2\right)\theta = 0$

⇒ $y = x$　∴ $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

複素平面

$z = x + iy \xleftrightarrow{対応} (x, y)$

$|z| = r$　$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



と定めると、

$z = x + iy = r\cos\theta + i(r\sin\theta)$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$　∵) オイラー

∴ $z = re^{i\theta}$: zの極表示

$\theta = \arg z$: 偏角

問) $e^{i\alpha}e^{i\beta}$を計算し、三角関数の加法定理を導け。

$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ …… (*)

(*)の左辺 $= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$ …①

(*)の右辺 $= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ …②

①, ②の実部と虚部を比較して、

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$　(加法定理)

非斉次の微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = \tilde{f}(t) \quad \leftarrow \text{tilde}$$

$L[x] = 0$ でない…

$L[x] = f$ $\quad$ f：既知の関数

<u>非斉次方程式の一般解</u>は、
$\begin{cases} \text{斉次方程式の一般解 } \tilde{x} & (\tilde{x}\text{：任意定数含む}) \\ + \\ \text{非斉次方程式の一般解 } x_0 \end{cases}$

i.e. $L[\tilde{x}] = 0$ と、$L[x_0] = f$

∵) $x = x_0 + \tilde{x}$ とすると、

$L[x_0 + \tilde{x}] = L[x_0] + L[\tilde{x}]$ ← 分配法則 成立.

$= f \quad (+\ 0\quad)$

ex) (強制振動) $f(t) = f_0 \cos\omega_0 t$ のとき. ($f(t)$：<u>外力</u>)

単振動 $\ddot{x} + \omega^2 x = \underbrace{f_0 \cos\omega_0 t}_{= f(t)}$ …… (*)

<解>

$x_0 = A\cos\omega_0 t$ としてみると、 $\dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$

$\ddot{x}_0 = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x_0$

(*)式に代入して、

$(-\omega_0^2 + \omega^2) A \cancel{\cos\omega_0 t} = f_0 \cancel{\cos\omega_0 t}$ $\quad {}^{x_0}$

$\therefore A = \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ (ただし、$\omega \neq \omega_0$) ← (もし $\omega = \omega_0$ なら、$f(t) = 0$ で 斉次なのだ")

↑ 定数 A が決定.

$\therefore x_0(t) = \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$ は、$\left(\dfrac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = f$ の特解.

⇒ 一般解 $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$ // ($\omega \neq \omega_0$)

(C_1, C_2 ：初期条件より)

<u>Eulerの式を用いて…</u>

$L[x] = 0$, $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + \omega^2$ において、

$x = e^{\lambda t}$ とする. (…と、$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x$

さらに、$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ ：特性方程式

$\therefore \lambda = \pm i\omega$

一般解として、$x = C_1 e^{(i\omega)t} + C_2 e^{(-i\omega)t}$ と書ける.

$\left(\begin{aligned} &= C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) \\ &= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t \end{aligned} \right)$

(続)　一般に、

$L[x]=0$ において、

$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t}(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)=0$

となる λ をさがす。

ex) 空気抵抗がある時の単振動 — $\boxed{\text{減衰振動}}$

力 $F=-kx\underbrace{-\gamma v}_{\text{空気抵抗}}$

$\xleftarrow{\gamma v}$ 質点 $\xrightarrow{v}$

$\|$

$m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}$

$\therefore \boxed{\ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\omega^2x=0}$ ← $\left(\omega^2=\frac{k}{m}\right)$

$a_1=\frac{\gamma}{m}$, $a_2=\omega^2$ に相当。

$$\begin{cases} L=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+a_{n-2}D^{n-2}+\cdots+a_1D^1+a_0, \\ \left(D=\frac{d}{dt},\ a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}:\text{定数}\right) \\ L[x]=0 \quad :\text{定数係数} \end{cases}$$

…線形微分方程式 において、

↑ $x=e^{\lambda t}$ とする方法が有効！