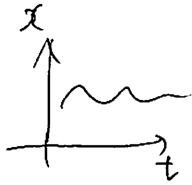
201110889
八木俊輔

1/4

Newton eq.



$x = x(t)$

$F = m\ddot{x}$ $\quad$ $x = x(t)$ の微分を含む方程式

<u>例</u> 単振動

$F = -kx$ $\quad$ $m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ $\quad$ $\therefore\ \omega^2 = \frac{k}{m}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $L[x] = 0$

$\underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]}_{L} x = 0$

$\uparrow\ x = x(t)$

$x = x(t)$ に L が作用する。

L : 微分演算子

解を探してくる.

$x = x_1(x) = \cos\omega t$

$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0.$

$L[x_1] = 0$

$x = x_2(t) = \sin\omega t$

$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$

$L[x_2] = 0.$

$L[x_i] = 0$ $\quad$, $\quad$ $i = 1, 2.$

ならば、

$L[c_1 x_1 + c_2 x_2] = L\left[\sum c_i x_i(t)\right] = 0.$

$\Longrightarrow$ L の線形性、重ね合わせの原理

任意の定数 C_1, C_2 に対して

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$ も解!!

$$= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1 + C_2x_2) + \omega^2(C_1x_1 + C_2x_2) = 0$$

$$L[C_1x_1 + C_2x_2] = 0$$

$$x = C_1x_1 + C_2x_2$$

C_1, C_2 は任意定数. → 一般解.

任意定数を2つ含む解

L : 2階の微分演算子

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\omega t \\ x_2 &= \sin\omega t \end{aligned}\right\}$$ → これを足して新しい解ができるか?

例 $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\omega t \\ x_2 &= -\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$ → 線形独立ではない.

$\boxed{\text{公式}}$ オイラーの公式

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$ (複素数の指数関数)

単振動　$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

運動？
c_1, c_2？
どのように定まるのか？

$t=0$ での場所 x_0
$t=0$ 〃 速度 v_0
} 初期条件

$x(0) = c_1 \overbrace{\cos\omega\cdot 0}^{\text{〃}1} + c_2 \overbrace{\sin\omega\cdot 0}^{\text{〃}0}$

$= c_1 = x_0$

$v(t) = \dot{x}(t) = -c_1 \omega \sin\omega t + c_2 \omega \cos\omega t$

$v(0) = c_2\omega = v_0 \quad \longrightarrow \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}$

$x = x(t)$

$= x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$

初期条件をみたす解

階数と同じだけの初期条件があれば運動が定まる。

<u>オイラーの公式</u>

$e^{i\theta}$?　$\underbrace{(e^{ax})' = a e^{ax}}_{\text{これを信じれば…}}$

$x = x(\theta) = e^{i\theta}$

$\frac{d}{d\theta} x = i e^{i\theta} = i x$,　$\frac{d^2}{d\theta^2} x = i^2 x = -x$.

$x(0) = e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$.

$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} \Big|_{\theta=0} = i\, x(0) = i$

$x = e^{i\theta}$ は $\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right) x = 0$.

関数で $x(0) = 0$,　$\frac{d}{d\theta} x \Big|_{\theta=0} = i$ となる関数.

一方、$y = \cos\theta + i\sin\theta$

$y(0) = \cos 0 + i\underbrace{\sin 0}_{0} = 1$

$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta \qquad \left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=0} = i$

$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right) y = 0 \Rightarrow y = x \Leftarrow \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ オイラーの法則

複素数?

$\mathbb{C}$：複素数全体　　$\mathbb{R}$：実数全体

$z \in \mathbb{C}$

$z = x + iy$、$x, y \in \mathbb{R}$　　$i^2 = -1$

$x = \mathrm{Re}\, z$ ：zの実部、$y = \mathrm{Im}\, z$ ：zの虚部

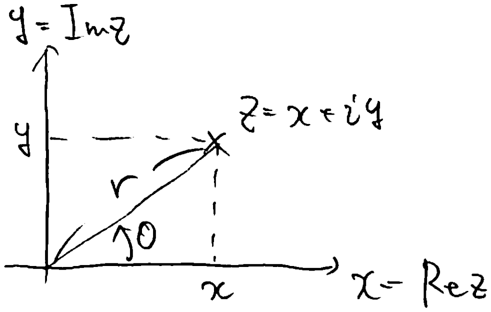
$\overline{z} = z^* = x - iy$ ：zの複素共役 conjugate of z

$z z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ （zの絶対値）

複素平面

$z = x + iy \Leftrightarrow (x, y)$



$|z| = r$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$

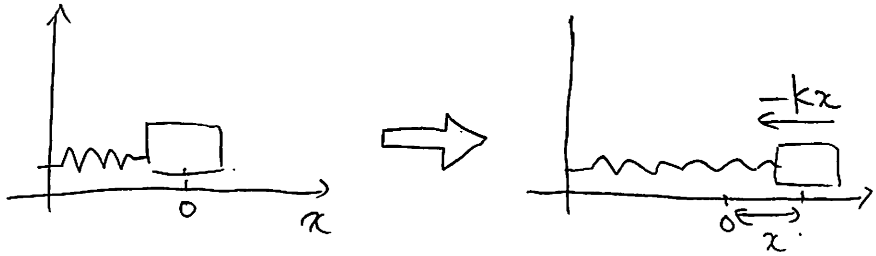
$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= re^{i\theta}$ ：zの極表示

$\theta = \arg z$ ：偏角

※問題　$e^{i\alpha}e^{i\beta}$を計算し、三角関数の加法定理を導け。

微分方程式：単振動、



手でゆらす

$m\ddot{x} = -kx + f(t)$　　$f(t)$：手で加えた力

$\ddot{x} + \omega^2 x = \underbrace{\frac{1}{m} f(t)}_{\tilde{f}(t)}$　外から加えた力（知っている）

強制振動

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = \tilde{f}(t)$

$L[x] = \tilde{f}$：既知の関数　非斉次の微分方程式

$L[x] = 0$：斉次方程式

非斉次方程式の一般解は、

斉次方程式の一般解 $\tilde{x}$ ＋ 非斉次方程式の特解 x_0

$L[x_0] = \tilde{f}$、

$L[\tilde{x}] = 0$.　　$\tilde{x}$：任意定数を含む

任意定数

$x = x_0 + \tilde{x}$　とすると.

$\underbrace{L[x_0 + \tilde{x}]}_{\tilde{f}} = \underbrace{L[x_0]}_{\tilde{f}} + \underbrace{L[\tilde{x}]}_{0}$

$f(t) = f_0 \cos\omega_0 t$

外力

単振動 $\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega_0 t$

$x_0 = A\cos\omega_0 t$ としてみる.

$(-\omega_0^2 + \omega^2) A\cos\omega_0 t = f_0 \cos\omega_0 t$

$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ $(\omega_0 \neq \omega)$

$\dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$ $\ddot{x}_0 = \underset{-\omega_0^2 x_0}{\underbrace{-\omega_0^2 A\cos\omega_0 t}}$

$x_0(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$ は $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = f$ の特解

⇨ 一般解 $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$

C_1, C_2：初期条件から決まる.

Eulerの公式

$L[x] = 0$ $L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$

$x = e^{\lambda t}$ とせよ. (一般的なやり方)

$\dot{x} = \lambda x$ $\ddot{x} = \lambda^2 x$

$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$：特性方程式 $\lambda = \pm i\omega$.

一般解として

$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ と書ける.

$= C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\omega\sin\omega t - i\sin\omega t)$

$= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$

この方法は一般に適用できる.

$L[x] = 0$

ex) $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 0$ ＊減衰振動

$\Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$ となるλを探す.

空気振抗がある時の単振動.

$$F = -kx - \underbrace{rv}_{\text{空気抵抗}} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \qquad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

$D = \frac{d}{dt}$ $\qquad a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \rightarrow$ 定数

$L[x] = 0$ ：定数係数線形微分方程式

$e^{\lambda t}$ とする方法が有効.