Newton eq. より

$F = m\ddot{x}$　：　$x = x(t)$.

今、$F = m\ddot{x}$ は既知で $x = x(t)$ は未知である.

質点 の world line を明らかにするために

$F = m\ddot{x}$　（微分方程式）

を解く方法を以下で学ぶ.

§ 簡単な微分方程式

○ 用語

* 独立変数 1コの微分方程式 → 常微分方程式

ex).

$h = h(x)$.　（$x \longmapsto h$ という関数）.

$h' = \frac{dh}{dx}$

（常微分）.

*. ex).

$h = h(x, y)$　（$(x, y) \longmapsto h$ という関数）

＜微分する方法として.＞

yは固定されているとして, xで微分する.

→ 偏微分　という.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{x' \to x} \frac{h(x', y) - h(x, y)}{x' - x}$$

i.e. xで偏微分したということ

○ 常微分方程式について.

* 微分方程式に含まれる最高の微分の次数 ≡ 階数

ex). 単振動.

$F = -kx \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{m}{k}x = 0$,　$\omega^2 \equiv \frac{m}{k}$,　$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$

$\therefore \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

No.

Date

では、具体的に $x=x(t)$ はどんな関数になるのか.
既知の事実を用いて試行してみる.

単振動はどんな動きをするかわかっているので

$x = \sin\omega t$ とおいてみる.

$\dot{x} = \omega\cos\omega t$

$\ddot{x} = -\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$

これは $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ を満たす.

$\therefore x = \sin\omega t$

大切なこと

(!) 何でもいいから 解を1つ 見つける.
特解

また、

$x = A\sin\omega t$ も $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ をみたす.

(A は任意の実数)

これは.

線型性 の 条件 I

$x = x(t)$ が解 $\Rightarrow$ $x = Ax$ (Aは任意の実数)

に依る.

同様に推測から、実際の計算をして.

$x = \cos\omega t$ も特解で $x = B\omega\sin\omega t$ (Bは任意の実数)

も解である。

次に

$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ を考えてみる.

$\dot{x} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$

$\ddot{x} = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2 x$

$\therefore$ $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ (A,B : 任意の実数)

またこれは 一般解 である

ii). 一般解とは.

階数と同じ数の任意定数を含む解

今、$\ddot{x} + w x = 0$ は 2階の微分方程式なので

$x(t) = A\sin wt + B\cos wt$ (A, B: 任意の実数)

は一般解といえる.

別). $x = \cos(wt + \theta)$ (θ: 定数) とおく.

$\dot{x} = -w\sin(wt+\theta)$

$\ddot{x} = -w^2\cos(wt+\theta) = -w^2 x$

よって, $x = \cos(wt+\theta)$ は特解

さらに線型性の条件I より,

$\therefore\ x = A\cos(wt+\theta)$ (A: 定数).

これは定数 A, θ を持つので一般解である.

- 線型性の条件II

$x = x_1(t)$ が解, $x = x_2(t)$ が解

$\Rightarrow\ x = x_1 + x_2$ も解

以下, 線型性の条件 をまとめると.

$x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ が解ならば
C_1, C_2 を任意定数として
$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$
も解となる.

No.

Date