— 数学 2D 試験（2005 年 7 月 22 日 13:00-16:00）：初貝 —

応用物理系は I-II,IV(a) を電気系は I-II,IV(b) をそれぞれすべて解答せよ。(その他の受験者は IV については (a)(b) いずれか一方を選択せよ)

I. 複素関数の基本に関する以下の問いに答えよ.

(a) $w = w(z) = \frac{z^2+1}{z-3}$, C_r を原点中心半径 r の原点を左に見る向きの円としよう.

(a-1) C_2 にそって円を一周したときの $\arg(z+i)$ の変化はいくらか, また $\arg \frac{1}{z-3}$ の変化はいくらか

(a-2) $I_r = \int_{C_r} dz \frac{w'(z)}{w(z)} = \int_{C_r} dz \frac{d}{dz} \log w(z)$ としたとき $I_{1/2}, I_2$ を理由をつけてそれぞれ求めよ.

(b) コーシーリーマン (CR) の関係式について以下の問いに答えよ.

(b-1) z の複素関数 $w(z) = X(x,y) + iY(x,y)$, $z = x+iy$ (x, y, X, Y は実数) について CR の関係式を書き下し、これに関して知るところを述べよ。

(b-2) $z = x + iy$ として $w = e^z$ が $|z| < \infty$ で正則であることを示せ.

II. (a) 次の和を計算し $M >> 1$ の時，実数の x について概形を図示せよ．$f_M(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{M} \cos kx$

(b) $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$ を三角級数に展開しこの展開に関してパーセバルの関係式を書き下せ。

(c) 区間 $[0,1]$ において定義される関数 $f(x), g(x)$ に対して内積を $(f,g) = \int_0^1 dx\, f^*(x) g(x)$ として以下の問いに答えよ.

(c-1) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が規格直交列をなすとは何か説明せよ。

(c-2) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が完全列をなすとは何か説明せよ。

(c-3) 規格直交列による展開 $f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$ が成立するときパーセバルの関係式を導け.

III. 3 次元の波動方程式の次の初期値問題を考える $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ $(t \geq 0)$

$u(\boldsymbol{r}, t=0) = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\boldsymbol{r})$.

(a) 変数分離形の解 $u(\boldsymbol{r}, t) = R(\boldsymbol{r})T(t)$ を仮定したとき、$T(t)$, $R(\boldsymbol{r})$ に関する方程式を導け。ただし記述はできるだけ詳しく論理を明解にせよ。

(b) $\delta(\boldsymbol{r})$ をフーリエ積分表示せよ。

(c) 初期条件を用い u をフーリエ積分表示せよ。

(d) 収束因子を導入して積分を実行し解を求めよ．($\delta(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\frac{1}{x-i0}$ に注意せよ．)

IV-a. 以下の積分の値を求めよ。ただし、$C(r)$ は $z=0$ を中心とした半径 r $(\neq \sqrt{5})$ の円周を 負の向き (時計回り) に一周する経路で、a, b は実数であり、$\mathcal{P}$ は Cauchy の主値

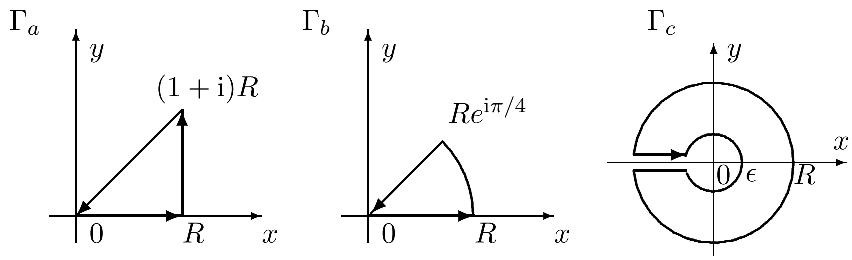
を表す。また、「半径 R の円周 (の一部) に沿ったある積分の値が、$R \to 0, +\infty$ のときに特定の値に近付く」という事実を必要とするときには、結果だけではなく、なぜそのようになるのかを簡単に説明すること。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2+\mathrm{i}bx} \quad (a>0)$, (2) $\displaystyle\oint_{C(r)} \mathrm{d}z\, \frac{1}{z^4-5z^2}$,

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \sin(ax^2) \quad (a>0)$, (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2} \quad (a>0,\, b>0)$,

(5) $\displaystyle\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{x-a}$, (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)[(\log x)^2+\pi^2]} \quad (a>0)$.

[ヒント：(3) $e^{-az^2/2}$ を、図の積分路 Γ_a もしくは Γ_b に沿って積分する。(6) $\log z$ の 分岐を負の実軸にとり、$[(z^2+a^2)\log z]^{-1}$ を積分路 Γ_c に沿って積分せよ。$(0<\epsilon<a<R)$。]



IV-b. (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx \quad (a,\ b>0)$ を求めよ.

(b) $\dfrac{z^3}{(z-1)^2(2z-1)^2}$ を $\zeta = \dfrac{1}{z}$ のべき級数として展開せよ. ただし, ζ は十分に小さいものとし、最初の 2 項のみを答えれば良い.

(c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z-1)^2(2z-1)^2}dz$ を求めよ.

(d) $\dfrac{1}{z^4-1}$ の全ての極と、そこでの留数を求めよ.

(e) $\displaystyle\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$ を求めよ.

(f) 図に示す積分経路を用い、$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}dx \quad (0<\alpha<2)$ を求めよ.