— 数学 2D 追試験（2005 年 10 月 26 日 17:00-19:00）：初貝 —

I. 複素関数の基本に関する以下の問いに答えよ.

(1) 複素平面上の正方形 $ABCD$, $A=1, B=i, C=-1, D=-i$ を正の向きにまわる積分路を C として $I_n=\int_C dz\,\frac{z+1}{z^n}$, ($n$ は整数) を求めよ.

(2) $a=-1+i\sqrt{3}$ として a^{10} を求めよ.

(3) $w(z)=\sin z$ が ($z<+\infty$ で) 正則であることを示せ.

II. (a) $f(x)=x,\ (-\pi<x<\pi)$ を三角級数に展開しこの展開に関してパーセバルの関係式を書き下せ。

(b) $f(x)=x,\ (0<x<2\pi)$ を三角級数に展開しこの展開と前問の展開において $x\to+0$ の振舞に関して議論せよ.

(c) 区間 $[0,1]$ において定義される関数 $f(x), g(x)$ に対して内積を $(f,g)=\displaystyle\int_0^1 dx\, f^*(x)g(x)$ として以下の問いに答えよ.

i. 関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が規格直交列をなすとは何か? またこの列が完全であるとは何か?

ii. 規格直交列による展開 $f(x)=\sum_n c_n\varphi_n(x)$ が成立するときパーセバルの関係式を導け.

(d) $f(x)=e^{-a|x|}, a>0$ をフーリエ変換し $\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{ikx}f(x)$ を求めよ.

(e) 前問の $\tilde{f}$ に対し $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,e^{-ikx}\tilde{f}(k)$ を求めよ. (計算を丁寧に示せ)

III. つぎの 3 次元の波動方程式の次の初期値問題をとけ. $\displaystyle\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u\ (t\geq 0)$

$$u(\boldsymbol{r},t=0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}).$$

IV 以下の積分の値を求めよ。ただし「半径 R の円周 (の一部) に沿ったある積分の値が、$R\to 0,+\infty$ のときに特定の値に近付く」という事実を必要とするときには、結果だけではなく、なぜそのようになるのかを簡単に説明すること。

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{1}{1+x^4}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{1}{1+x^{2n}}$, n は自然数.

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}dx\,\frac{1}{1+p\cos x}$, $|p|<1$