— 数学 2C 試験（2001 年 7 月 27 日 13:00-16:00）：初貝 —

I-IV をすべて解答せよ。ただし IV は演習での担当者の問題のみを解答せよ。演習を履修していないものは IV A, B のどちらか一方を解答せよ。

I. I.1 複素関数 $w = w(z)$ ($z = x + \mathrm{i}y$, x, y は実数) が正則であるとは何かを説明せよ。

I.2 複素関数 $w = w(z) = X(x, y) + \mathrm{i}Y(x, y)$ (X, Y は実数) についてコーシーリーマンの関係式を書き下せ。

I.3 複素関数の正則性とコーシーリーマンの関係式について知るところをできる限り詳しく述べよ。

I.4 複素関数 $w = |z|$ は $z = 1$ において正則かどうか理由をつけて述べよ。

I.5 $z = 1$ の周りの半径 3 の円 C(ただし向きは反時計回りとする), 関数 $w = \frac{z^2}{z-1}$ に対して次の量を計算せよ。

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C dz \frac{w'(z)}{w(z)}$$

II. II.1 デルタ関数 $\delta(x)$ に関する次の積分を求めよ。ただし $f(x)$ は任意の十分なめらかな関数とする

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a)$$

II.2 関数 $G(x)$ が $G''(x) + G(x) = \delta(x)$ を満たすとき、微分方程式 $y''(x) + y(x) = x$ の特解を G を用いて書け。(理由も述べよ)

II.3 $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi$ を複素フーリエ展開せよ。

II.4 $f(x) = x,\ 0 < x < 2\pi$ を複素フーリエ展開せよ。これが 2-3 と異なるのはなぜか

II.5 ある関数 $f(x)$ が規格直交系をなす完全系 $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty},\ a < x < b$ で

$$f(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$$

と展開されているとき、パーセバルの関係式を書き下せ。

III. 時刻 t 場所 x における温度 $u(t, x)$ に関する 1 次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を境界条件 $u(t, 0) = 0$, $u(t, 1) = 0$, 初期条件 $u(0, x) = x(1 - x)$ のもとで考える。

III.1 変数分離形の解 $u(t,x)=T(t)X(x)$ を仮定したとき、$T(t)$, $X(x)$ に関する方程式を導け。ただし記述はできるだけ詳しく論理を明解にせよ。

III.2 境界条件を用い $u(t,x)$ を級数表示せよ。

III.3 初期条件を用い $u(t,x)$ を求めよ。

III.4 同様に 2 次元の熱伝導方程式 $u_t=\kappa\Delta u$ に対して直交座標で $u(t,x)=T(t)X(x)Y(y)$ と仮定したとき $T(t), X(x), Y(y)$ の満たす方程式を導け。記述は III.1 と同様に詳しく論理を明解に記せ。

IV. A (航空、船舶、量子他：守田) 以下の積分を求めよ。

IV A.1 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$

IV A.2 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$

IV A.3 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$ ただし、ここで $1>a>0$。

IV A.4 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x}dx$ ただし、ここで $a>0$。

IV.B (建築、土木他：湯川) 次の定積分を複素積分を用いて計算せよ。(B.a) では、どのような積分経路で積分したか明示せよ。(B.b) では与えられた積分経路で複素積分を実行せよ。

IV B.a $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dx\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ a, b は互いに異なる正の実数

IV B.b $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1}dx$ $(-1<\alpha<1)$