— 数学 2C 試験（2001 年 7 月 19 日 13:00-16:00）：初貝 —

I-IV をすべて解答せよ。

I. 複素関数 $w = w(z) = \log z$ ($z = x + iy$, x, y は実数) について考えよう。

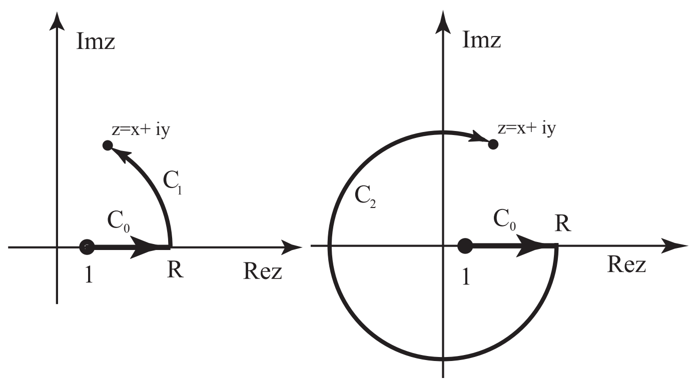
(a) 領域 $D = \{x+iy|x > 0\}$ において多価性に注意して $X(x,y) = \mathrm{Re}\, w(z)$, $Y(x,y) = \mathrm{Im}\, w(z)$ を求めよ。ただし s が実の場合 $-\pi/2 < \mathrm{Arctan}\, s < \pi/2$ とする。ここで $t = \mathrm{Arctan}\, s \leftrightarrow s = \tan t$ である。

(b) 一般の複素関数 $w = X(x,y) + iY(x,y)$ (X, Y は実数) についてコーシーリーマンの関係式を書き下し、これに関して知るところを述べよ。

(c) (a) で求めた関数がコーシーリーマンの関係式を満たすことを確認せよ。

(d) $x > 0, y > 0$ の時, C_0 を $z = 1$ と $z = R = \sqrt{x^2 + y^2}$ をむすぶ直線、C_1, C_2 を図の半径 R の円弧として次の積分で与えられる関数をそれぞれ求め $w = \log z$ との関係を述べよ。

$$I_1(x,y) = \int_{C_0+C_1} dz\, \frac{1}{z}$$
$$I_2(x,y) = \int_{C_0+C_2} dz\, \frac{1}{z}$$



II. (a) 関数 $f(x), g(x)$ の内積を $(f,g) = \int_0^1 dx\, f^*(x)g(x)$ として

i. 関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ が規格直交列をなすとは何か説明せよ。

ii. デルタ関数 $\delta(x)$ に関する次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-a)$$

iii. ここであつかう関数 $f(x)$ は常に

$$f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$

と展開されるとして c_n を求めよ。

iv. c_n を展開式に代入し $f(x)$ が任意であることを用いデルタ関数の表示式を求めよ。

(b) $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$ を三角級数に展開せよ。

(c) この展開に関してパーセバルの関係式を書き下せ。

III. 時刻 t 場所 (x, y) における温度 $u(t, x, y)$ に関する 2 次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u, \quad (\kappa > 0)$$

を正方形の領域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ で考える。ただし境界条件としては

境界 $(x, y) \in \partial D$ において $u(t, x, y) = 0$ とし

さらに初期条件 $u(0, x, y) \quad = \quad x(1 - x) \sin \pi y$ のもとで考える。

(a) 変数分離形の解 $u(t, x) = T(t)X(x)Y(y)$ を仮定したとき、$T(t), X(x), Y(y)$ に関する方程式を導け。ただし記述はできるだけ詳しく論理を明解にせよ。

(b) 境界条件を用い u を級数表示せよ。

(c) 初期条件を用い u を求めよ。

IV. 次の定積分を複素積分を用いて計算せよ。

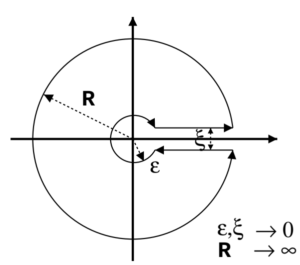
(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \sin \theta + a^2}$ 　ただし $a > 1$ とする。

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + 1)^2}$

(ヒント：被積分関数に $\log z$ を掛け、与えられた積分経路で積分を実行せよ。)

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos \omega x}{2 \cosh x}$ 　ただし $\omega > 0$ とする。



問題 (c) の積分路