数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第九回レポート解答例

1. $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(ax)$ $(a>0)$ を $ax=t$ として計算し、$\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x)$ を示せ.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(ax) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{1}{a}\ f(\frac{t}{a})\ \delta(t) &(1)\\ &= \frac{1}{a}f(0) &(2)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\ \frac{1}{a}\ \delta(x) &(3)\end{aligned}$$

よって

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\ \delta(x) \quad (4)$$

2. 次の関係を図示せよ（x は実数）

i). $f(x)=-\dfrac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\ \dfrac{1}{x+i\epsilon}$ $(|\epsilon|<<1)$

$f(x)$ は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\frac{1}{x+i\epsilon} &(5)\\ &= -\frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} &(6)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} &(7)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-2x\epsilon^2}{\pi(x^2+\epsilon^2)^2} &(8)\\ f''(x) &= \frac{2\epsilon^2(3x^2-\epsilon^2)}{\pi(x^2+\epsilon^2)^3} &(9)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}f(0) &= \frac{1}{\pi\epsilon} &(10)\\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= 0 &(11)\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 &(12)\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)} &(13)\\ &= \left[\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\epsilon})\right]_{-\infty}^{\infty} &(14)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &(15)\\ &= 1 &(16)\end{aligned}$$

ii). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} \quad (|\epsilon| << 1)$

直接、微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2x}{\sqrt{\pi}\epsilon^3} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} & (17) \\
f''(x) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}\epsilon^3} \left(1 - 2\,\frac{x^2}{\epsilon^2}\right) e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} & (18)
\end{aligned}
$$

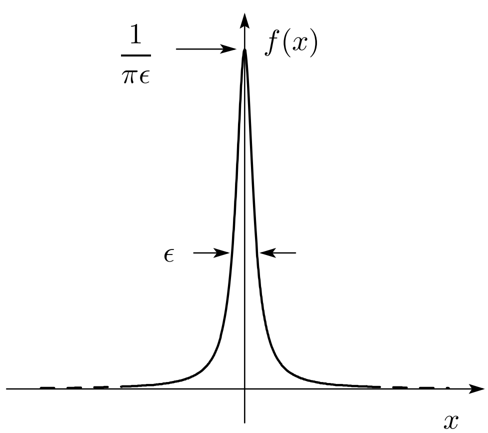
また

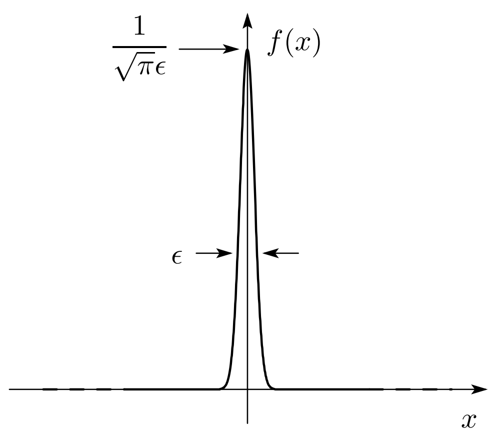
$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} & (19) \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= 0 & (20) \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 & (21)
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} & (22) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \sqrt{\pi\epsilon} & (23) \\
&= 0 & (24)
\end{aligned}
$$

下図左に i) の結果、右に ii) の結果を示す。これらからグラフは、$x = 0$ に頂点がある山型になることがわかる。$|\epsilon| << 1$ になるほどその頂点は高くなり、ピークの幅が細くなる。また、積分が 1 であることから、$|\epsilon| << 1$ でデルタ関数のように振舞うことがわかる。





3. $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2\pi$ を複素フーリエ級数に展開せよ

$f(x) = x$ の複素フーリエ展開は以下のように表される。

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx} \tag{25}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} xe^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{26}$$

c_n を具体的に求める。
$n = 0$ のとき

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx && (27) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} && (28) \\ &= \pi && (29) \end{aligned}$$

$n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} xe^{-inx} dx && (30) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[-\frac{xe^{-inx}}{in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{e^{-inx}}{in} \, dx \right) && (31) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[-\frac{xe^{-inx}}{in} \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{e^{-inx}}{-n^2} \right]_0^{2\pi} \right) && (32) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(-\frac{2\pi}{in} + 0 \right) - \left(\frac{1}{-n^2} - \frac{1}{-n^2} \right) \right) && (33) \\ &= \frac{\pi}{n} i && (34) \end{aligned}$$