数学２C (水曜２限、10:15　11:45) 第八回レポート解答例

1. i) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ を $z = a(a \neq 1)$ のまわりで Taylor 展開せよ

ii) また、その収束半径が $|a-1|$ であることを示せ.

$\dfrac{1}{1-x}$ の $x = 0$ 周りでの Taylor 展開は以下のようになる（$x \leq 1$、つまり収束半径 $|1|$)。

$$\frac{1}{1-x} \quad = \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \tag{1}$$

これより、$f(z)$ は

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \quad \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{1-a}} \tag{2}$$

と変形できるので、その Taylor 展開は

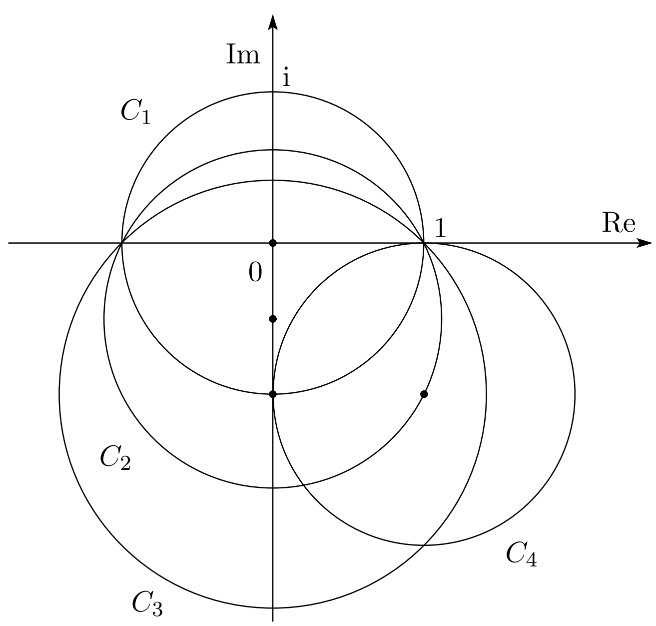
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a}\left(1 + \left(\frac{z-a}{1-a}\right) + \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^2 + \cdots\right) \tag{3}$$

よって、$\left|\dfrac{z-a}{1-a}\right| \leq 1$ より、$|z-a| \leq |a-1|$. つまり収束半径は $|a-1|$.

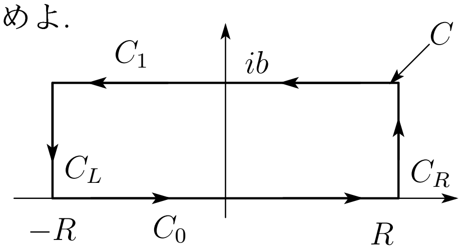
iii) $a = 0$ のときの収束円 C_1, $a = -\frac{i}{2}$ のときの収束円 C_2, $a = -i$ のときの収束円 C_3, $a = 1-i$ のときの収束円 C_4 を示せ.

- C_1 は中心 0、半径 $|0-1| = 1$ の円.
- C_2 は中心 $-\frac{i}{2}$、半径 $|-\frac{i}{2}-1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ の円.
- C_3 は中心 $-i$、半径 $|-i-1| = \sqrt{2}$ の円.
- C_4 は中心 $1-i$、半径 $|(1-i)-1| = |i| = 1$ の円.

よって、結果を図に示す。



2.　C 上で $\int_C e^{-z^2}dz$ を計算し、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ib)^2}dx$ を求めよ.



C 内部に特異点は存在しないので

$$\lim_{R\to\infty}\int_C e^{-z^2}dz = 0 \tag{4}$$

また、C を図のように C_1, C_L, C_0, C_R と分割して考える。

C_1 上は、$z = -x + ib$ とおくと、$dz = -dx$, $z : -\infty \to \infty$ より、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} e^{-z^2}dz = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ib)^2}dx \tag{5}$$

C_0 上は、$z = x$ とおくと、$dz = dx$, $z : -\infty \to \infty$ より、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_0} e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{6}$$

C_R 上は、$z = -R + ixb$ とおくと、$dz = ib\ dx$, $z : 1 \to 0$ より、

$$\int_{C_R} e^{-z^2}dz = \int_1^0 e^{-(-R+ixb)^2}dx = -\int_0^1 ib\ e^{-R^2+i2Rbx+b^2x^2}dx \tag{7}$$

C_L 上は、$z = R + ixb$ とおくと、$dz = ib\ dx$, $z : 0 \to 1$ より、

$$\int_{C_L} e^{-z^2}dz = \int_0^1 e^{-(R+ixb)^2}dx = \int_0^1 ib\ e^{-R^2-i2Rbx+b^2x^2}dx \tag{8}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{C_L} e^{-z^2}dz + \int_{C_R} e^{-z^2}dz &= ib\int_0^1 e^{-R^2-i2Rbx+b^2x^2} - e^{-R^2+i2Rbx+b^2x^2}dx && (9)\\
&= ib\int_0^1 e^{-R^2+b^2x^2}\left(e^{-i2Rbx} - e^{i2Rbx}\right)dx && (10)\\
&= ib\int_0^1 e^{-R^2+b^2x^2} - 2i\sin(2Rbx)dx && (11)\\
&= 2be^{-R^2}\int_0^1 e^{b^2x^2}\sin(2Rbx)dx && (12)
\end{aligned}$$

ここで、$I = 2be^{-R^2}\int_0^1 e^{b^2x^2} sin(2Rbx)dx$ とおくと、$0 \le x \le 1$ の範囲では、$(0 \le)1 \le e^{b^2x^2} \le e^{b^2}$、$-1 \le \sin(2Rbx) \le 1$ なので、

$$\int_0^1 -e^{b^2}dx \le \int_0^1 e^{b^2x^2}\sin(2Rbx)dx \le \int_0^1 e^{b^2}dx \tag{13}$$

$$-2be^{-R^2}e^{b^2} \le 2be^{-R^2}\int_0^1 e^{b^2x^2}\sin(2Rbx)dx \le 2be^{-R^2}e^{b^2} \tag{14}$$

$$-2be^{-R^2+b^2} \leq I \leq 2be^{-R^2+b^2} \tag{15}$$

はさみうちより、

$$\lim_{R\to\infty} I = 0 \tag{16}$$

なので、

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_L} e^{-z^2}dz + \int_{C_R} e^{-z^2}dz\right) = 0 \tag{17}$$

よって式 (4) より、

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_C e^{-z^2}dz &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_1} e^{-z^2}dz + \int_{C_0} e^{-z^2}dz + \int_{C_L} e^{-z^2}dz + \int_{C_R} e^{-z^2}dz\right) && (18)\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ib)^2}dx + \sqrt{\pi} + 0 && (19)\\
&= 0 && (20)
\end{aligned}$$

結局、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ib)^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{21}$$