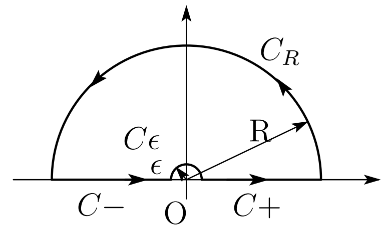
数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第七回レポート解答例

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx$ を求めよ.



まず、$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx$ とおく.

そこで、$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_C \frac{Logz}{z^2+a^2}\ dz$ を考える。

$f(z) = \dfrac{Logz}{z^2+a^2} = \dfrac{\log|z| + iArg(z)}{z^2+a^2}$ とおくと

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{C_R} f(z)dz + \int_{C-} f(z)dz + \int_{C\epsilon} f(z)dz + \int_{C+} f(z)dz\right) \quad (1)$$

まず、C_R 上では

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad (2)$$

つぎに、$C\epsilon$ 上では、$z = \epsilon e^{i\theta}$ とおくと、$\theta : \pi \to 0,\ dz = i\ \epsilon\ e^{i\theta}d\theta =$ より、

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C\epsilon} f(z)dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\pi^0 \frac{\log\epsilon + i\theta}{\epsilon^2 e^{2i\theta} + a^2}\ i\ \epsilon\ e^{i\theta}d\theta && (3)\\
&= \int_\pi^0 \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon\log\epsilon + i\epsilon\theta}{\epsilon^2 e^{2i\theta}+a^2}\ i\ e^{i\theta}d\theta && (4)\\
&= \int_\pi^0 \frac{0+0}{0+a^2}\ i\ e^{i\theta}d\theta && (5)\\
&= 0 && (6)
\end{aligned}$$

また、$C+$ 上では、$z = x$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C+} f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R \frac{\log|x| + iArg(x)}{x^2+a^2}dx && (7)\\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R \frac{\log x}{x^2+a^2}dx && (8)\\
&= \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx = I && (9)
\end{aligned}$$

最後に、$C-$ 上では、$z = -x$ とおくと $x : R \to \epsilon,\ dz = -dx$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C-} f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_R^\epsilon \frac{\log|-x| + iArg(-x)}{(-x)^2+a^2}(-1)dx && (10)\\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R \frac{\log x + i\pi}{x^2+a^2}dx && (11)\\
&= \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx + \int_0^\infty \frac{i\pi}{x^2+a^2}dx && (12)\\
&= I + i\pi\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^\infty && (13)\\
&= I + i\frac{\pi^2}{2a} && (14)
\end{aligned}$$

また、$f(z)=\dfrac{Logz}{(z-ia)(z+ia)}$ なので、f(z) は C の内部には、$z=ia$ に一位の極をもち、その留数は

$$
\begin{aligned}
Resf(ia) &= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{Logz}{(z-ia)(z+ia)} && (15)\\
&= \frac{Log(ia)}{ia+ia} && (16)\\
&= \frac{\log a+i\frac{\pi}{2}}{2ia} && (17)\\
&= \frac{2\log a+i\pi}{4ia} && (18)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_C f(z)dz &= 2\pi iResf(ia) && (19)\\
&= 2\pi i\ \frac{2\log a+i\pi}{4ia} && (20)\\
&= \frac{\pi\log a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a} && (21)
\end{aligned}
$$

式 (2)、(6)、(9)、(14)、(21) を式 (1) に代入すると、

$$
\frac{\pi\log a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a}=0+\left(I+i\frac{\pi^2}{2a}\right)+0+I \qquad (22)
$$

$$
\qquad (23)
$$

これより、

$$
I=\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi\ \ \log a}{2a} \qquad (24)
$$

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$ を示せ.

$t = x^2$ と置換することによって、$\Gamma(\frac{1}{2})$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt && (25)\\
&= \int_0^\infty e^{-x^2} x^{-1} 2x dx && (26)\\
&= \int_0^\infty 2e^{-x^2} dx && (27)\\
&= \sqrt{\pi} && (28)
\end{aligned}$$

ここで、ガンマ関数は一般に $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) && (29)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ \Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) && (30)\\
&= \cdots && (31)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) && (32)\\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} && (33)
\end{aligned}$$

* 前半は $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ に $z = \frac{1}{2}$ を代入しても得られる。

3. $\displaystyle\int_0^1 dt\ \ t^8(1-t)^{19}$ を求めよ.

与式はベータ関数 $B(x,y)$ を用いて

$$\int_0^1 dt\ \ t^8(1-t)^{19} = B(9,20) \qquad (34)$$

となる。また、ベータ関数はガンマ関数を用いて次のように表せる.

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (35)$$

また、ガンマ関数は正数 n に対しては $\Gamma(n) = (n-1)!$ となるので

$$B(9,20) = \frac{\Gamma(9)\Gamma(20)}{\Gamma(29)} = \frac{8!\ 19!}{28!} = \frac{1}{62162100} \qquad (36)$$