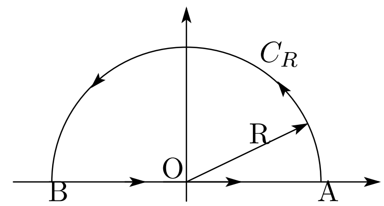
数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第五回レポート解答例 (TA 山田和彦君)

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{(1+x^2)^2}$ を求めよ.



$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\frac{1}{(1+z^2)^2}$ を考えると、弧 AB での積分は 0 となるので、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\frac{1}{(1+z^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{(1+x^2)^2} \tag{1}$$

また

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z^2+i)^2(z^2-i)^2} \tag{2}$$

よって、$f(z)$ は $z = i, -i$ でそれぞれ２位の極となる。その中で、C_R 内にあるのは $z = i$ のみなので、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\frac{1}{(1+z^2)^2} = 2\pi i\ Resf(z=i) \tag{3}$$

ここで $g(z)$ が $z = a$ で k 位の極を持つとすると、$z = a$ での留数は

$$Res\ g(a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k g(z)\right) \tag{4}$$

で与えられるので、

$$\begin{aligned}
Res\ f(z=i) &= \lim_{z\to i}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{1}{(z^2+i)^2(z^2-i)^2}\right) && (5)\\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} && (6)\\
&= \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} && (7)\\
&= \frac{-2}{(2i)^3} && (8)\\
&= \frac{-i}{4} && (9)
\end{aligned}$$

よって、

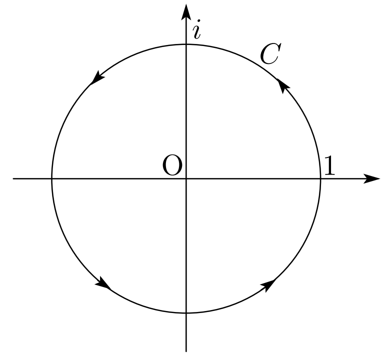
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\frac{1}{(1+z^2)^2} = 2\pi i\ Resf(z=i) = 2\pi i\ \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta$ を求めよ.



$z=e^{i\theta}$ とおくと、$z: C$ 上, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$,

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$,

$\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \dfrac{z^n+z^{-n}}{2}$ となり、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta &= \int_C \frac{\frac{z^n+z^{-n}}{2}}{1-2c\,\frac{z+z^{-1}}{2}+c^2}\frac{1}{iz}dz && (13)\\
&= -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^n+z^{-n}}{cz^2-(1+c^2)z+c}dz && (14)\\
&= \frac{i}{2}\int_C \frac{1}{z^n}\frac{z^{2n}+1}{(cz-1)(z-c)}dz && (15)\\
&= \frac{i}{2c}\int_C \frac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})(z-c)}dz && (16)
\end{aligned}
$$

ここで、$f(z)=\dfrac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})(z-c)}$ とおくと、$f(z)$ は、$z=0$ に n 位の極、$z=c$ に 1 位の極、$z=\dfrac{1}{c}$ に 1 位の極と計 3 つの極を持つ。

次にそれぞれのこの 3 点の留数を求める。

$z=c$ は 1 位の極なので、

$$
\begin{aligned}
Resf(c) &= \lim_{z\to c}(z-c)\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})(z-c)} && (17)\\
&= \lim_{z\to c}\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})} && (18)\\
&= \frac{c^{2n}+1}{c^n(c-\frac{1}{c})} && (19)\\
&= \frac{c^n+c^{-n}}{c-c^{-1}} && (20)
\end{aligned}
$$

$z=\dfrac{1}{c}$ は一位の極なので、

$$
\begin{aligned}
Resf(\frac{1}{c}) &= \lim_{z\to\frac{1}{c}}(z-\frac{1}{c})\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})(z-c)} && (21)\\
&= \lim_{z\to\frac{1}{c}}\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-c)} && (22)\\
&= \frac{c^{-2n}+1}{c^{-n}(\frac{1}{c}-c)} && (23)\\
&= -\frac{c^n+c^{-n}}{c-c^{-1}} && (24)
\end{aligned}
$$

$z=0$ は n 位の極なので、

$$\begin{aligned}
Resf(0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^n\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-\frac{1}{c})(z-c)}\right) && (25)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z^{2n}+1)\frac{1}{(z-\frac{1}{c})(z-c)}\right) && (26)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z^{2n}+1)\frac{c}{c^2-1}\left(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z-\frac{1}{c}}\right)\right) && (27)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\ \frac{c}{c^2-1}\quad\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z^{2n}+1)\left(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z-\frac{1}{c}}\right)\right) && (28)
\end{aligned}$$

ここで、$\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-\frac{1}{c}}$ を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-c} &= -\frac{1}{c}-\frac{1}{c^2}z-\frac{1}{c^3}z^2\cdots-\frac{1}{c^{n+1}}z^n\cdots && (29)\\
\frac{1}{z-\frac{1}{c}} &= -c-c^2z-c^3z^2\cdots-c^{n+1}z^n\cdots && (30)
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z-\frac{1}{c}} = (c-\frac{1}{c})+(c^2-\frac{1}{c^2})z+(c^3-\frac{1}{c^3})z^2\cdots+(c^{n+1}-\frac{1}{c^{n+1}})z^n\cdots \qquad (31)$$

また

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k = (n-1)!\ a_{n-1} \qquad (32)$$

なので、式 (28) に、式 (31) を代入した次の式を考えると、

$$(z^{2n}+1)\left((c-\frac{1}{c})+(c^2-\frac{1}{c^2})z\cdots+(c^n-\frac{1}{c^n})z^{n-1}\cdots\right) \qquad (33)$$

この式の z^{n-1} の係数は $1\times(c^n-\frac{1}{c^n})$ である．よって、

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z^{2n}+1)\left(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z-\frac{1}{c}}\right)\right) = (n-1)!\left(c^n-\frac{1}{c^n}\right) \qquad (34)$$

よって

$$\begin{aligned}
Resf(0) &= \frac{1}{(n-1)!}\ \frac{c}{c^2-1}(n-1)!\left(c^n-\frac{1}{c^n}\right) && (35)\\
&= \frac{c^n-c^{-n}}{c-c^{-1}} && (36)
\end{aligned}$$

i). $|c| \leq 1$ のとき.

このとき、C 内にある極は $z=0$ と $z=c$. よって

$$\int_C f(z) = 2\pi i\ Resf(0) + 2\pi i\ Resf(c) \tag{37}$$
$$= 2\pi i \left(\frac{c^n - c^{-n}}{c - c^{-1}} + \frac{c^n + c^{-n}}{c - c^{-1}} \right) \tag{38}$$
$$= 4\pi i \frac{c^n}{c - c^{-1}} \tag{39}$$

よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2c\cos\theta + c^2}\ d\theta = \frac{i}{2c} \int_C f(z) \tag{40}$$
$$= \frac{i}{2c} \left(\frac{4\pi i c^n}{c - c^{-1}} \right) \tag{41}$$
$$= \frac{2\pi c^n}{1 - c^2} \tag{42}$$

ii). $|c| \geq 1$ のとき.

このとき、C 内にある極は $z=0$ と $z=\frac{1}{c}$. よって

$$\int_C f(z) = 2\pi i\ Resf(0) + 2\pi i\ Resf(\frac{1}{c}) \tag{43}$$
$$= 2\pi i \left(\frac{c^n - c^{-n}}{c - c^{-1}} - \frac{c^n + c^{-n}}{c - c^{-1}} \right) \tag{44}$$
$$= -4\pi i \frac{c^{-n}}{c - c^{-1}} \tag{45}$$

よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2c\cos\theta + c^2}\ d\theta = \frac{i}{2c} \int_C f(z) \tag{46}$$
$$= \frac{i}{2c} \left(\frac{-4\pi i c^{-n}}{c - c^{-1}} \right) \tag{47}$$
$$= \frac{-2\pi c^{-n}}{1 - c^2} \tag{48}$$

iii). $c=0$ のとき.（補足）

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2c\cos\theta + c^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta \tag{49}$$
$$= \left[\frac{1}{n} \sin n\theta \right]_0^{2\pi} \tag{50}$$
$$= 0 \tag{51}$$

3. $I=\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{\cos\theta}\cos(n\theta - sin\theta)$ を求めよ.

まず、I は次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{\cos\theta}\cos(n\theta - sin\theta) && (52)\\
&= Re\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{\cos\theta} e^{i(n\theta - sin\theta)} && (53)\\
&= Re\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{\cos\theta - i\sin\theta} e^{in\theta} && (54)
\end{aligned}
$$

$z=e^{i\theta}$ とおくと、$z:C$（単位円）上, $dz=ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}=\dfrac{1}{z}$, $e^{in\theta}=z^n$ となる. よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{\cos\theta - i\sin\theta} e^{in\theta} &= \int_C \frac{1}{iz}dz\ e^{\frac{1}{z}} z^n && (55)\\
&= -i\int_C z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}dz && (56)
\end{aligned}
$$

$f(z)=z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}$ とおくと、$f(z)$ は、$z=0$ で極となる（真性特異点）.

$e^{\frac{1}{z}}$ を Laurant 展開すると、

$$
e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots \qquad (57)
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^{n-1}e^{\frac{1}{z}} && (58)\\
&= z^{n-1} + z^{n-2} + \frac{1}{2!}z^{n-3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\ \frac{1}{z} + \cdots && (59)
\end{aligned}
$$

$z=0$ での留数は、$\dfrac{1}{z}$ の係数で与えられるので、

$$
Resf(0) = \frac{1}{n!} \qquad (60)
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
I &= Re\left(-i\int_C z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}dz\right) && (61)\\
&= Re\Big(-i\ 2\pi i\ Resf(0)\Big) && (62)\\
&= Re\left(2\pi\ \frac{1}{n!}\right) && (63)\\
&= \frac{2\pi}{n!} && (64)
\end{aligned}
$$

別解

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta$ を求めよ.

まず、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta = Re\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta \tag{65}$$

ここで、$z=e^{i\theta}$ とおくと、$z:C$（単位円）上, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$,

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} = z^n$ となり、

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}\,d\theta &= \int_C \frac{z^n}{1-2c\,\dfrac{z+z^{-1}}{2}+c^2}\frac{1}{iz}dz &(66)\\
&= \int_C -\frac{1}{i}\,\frac{z^n}{cz^2-(1+c^2)z+c}dz &(67)\\
&= \int_C \frac{iz^n}{(cz-1)(z-c)}dz &(68)\\
&= \int_C \frac{iz^n}{c(z-\frac{1}{c})(z-c)}dz &(69)
\end{aligned}$$

ここで、$f(z) = \dfrac{iz^n}{c(z-\frac{1}{c})(z-c)}$ とおくと、$f(z)$ は $z=c, \dfrac{1}{c}$ で極になっている.

$z=c$ は 1 位の極なので、

$$\begin{aligned}
Resf(c) &= \lim_{z\to c}(z-c)\frac{iz^n}{c(z-\frac{1}{c})(z-c)} &(70)\\
&= \lim_{z\to c}\frac{iz^n}{c(z-\frac{1}{c})} &(71)\\
&= \frac{ic^n}{c^2-1} &(72)
\end{aligned}$$

$z=\dfrac{1}{c}$ は一位の極なので、

$$\begin{aligned}
Resf(\frac{1}{c}) &= \lim_{z\to\frac{1}{c}}(z-\frac{1}{c})\frac{iz^n}{c(z-\frac{1}{c})(z-c)} &(73)\\
&= \lim_{z\to\frac{1}{c}}\frac{iz^n}{c(z-c)} &(74)\\
&= \frac{ic^{-n}}{c(\frac{1}{c}-c)} &(75)\\
&= \frac{-ic^{-n}}{c^2-1} &(76)
\end{aligned}$$

i). $|c| \leq 1$ のとき. このとき、C 内にある極は $z=c$ のみ. よって

$$\int_C f(z) = Re\,(2\pi i\ Resf(c)) \tag{77}$$

$$= Re\left(2\pi i\frac{ic^n}{c^2-1}\right) \tag{78}$$

$$= \frac{2\pi c^n}{1-c^2} \tag{79}$$

ii). $|c| \geq 1$ のとき.

このとき、C 内にある極はと $z = \dfrac{1}{c}$ のみ. よって

$$Re\int_C f(z) = Re\left(2\pi i\ Resf(\frac{1}{c})\right) \tag{80}$$

$$= Re\left(2\pi i\frac{ic^{-n}}{1-c^2}\right) \tag{81}$$

$$= \frac{-2\pi c^{-n}}{1-c^2} \tag{82}$$