数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第四回レポート解答例 (TA 山田和彦君)

1. i). $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}\ (a > 0)$ を求めよ.

まず、

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-ay^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\ e^{-a(x^2+y^2)} \tag{1}$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $dxdy = r\ drd\theta,\ \ r : 0 \to \infty,\ \ \theta : 0 \to 2\pi$ となるので、

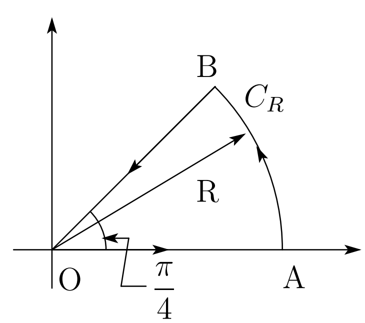
$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r\ e^{-ar^2}\ dr\ d\theta & (2)\\ &= \int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2a}e^{-ar^2}\right]_0^{\infty} d\theta & (3)\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2a}d\theta & (4)\\ &= 2\pi\ \frac{1}{2a} & (5)\\ &= \frac{\pi}{a} & (6) \end{aligned}$$

よって

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{7}$$

ii). C_R に沿って $\int_{C_R} dz\ e^{-z^2}$ を計算し、

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin x^2,\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos x^2$ を求めよ.



e^{-z^2} は正則 (補足*1) より、$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ e^{-z^2} = 0$

C_R を区間 OA, AB, BO にわけて $\int_{C_R} dz\ e^{-z^2}$ の積分を実行する.

区間 OA は、$z = t$ とおくと、$t : 0 \to R,\ dz = dt$ より、 i) を利用すると

$$\lim_{R\to\infty}\int_{OA} dz\ e^{-z^2} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t^2}dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{8}$$

区間 AB は（補足*2 より)、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} dz\ e^{-z^2} = 0 \tag{9}$$

区間 BO は、$z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t$ とおくと、$t:R\to 0,\ \ dz=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)dt,\ \ z^2=it^2$ より、

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{BO} dz\ e^{-z^2} &= \lim_{R\to\infty}\int_R^0 e^{-it^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)dt & (10)\\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\int_0^R \cos t^2 dt - i\int_0^R \sin t^2 dt\right) & (11)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\int_0^\infty \cos t^2 dt - i\int_0^\infty \sin t^2 dt\right) & (12)
\end{aligned}$$

そこで、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{OA} dz\ e^{-z^2} + \lim_{R\to\infty}\int_{AB} dz\ e^{-z^2} + \lim_{R\to\infty}\int_{BO} dz\ e^{-z^2} = 0 \tag{13}$$

より、$I_s=\int_{-\infty}^{\infty} dx\sin x^2,\ I_c=\int_{-\infty}^{\infty} dx\cos x^2$ とおくと、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{I_c}{2}-i\frac{I_s}{2}\right)=0 \tag{14}$$

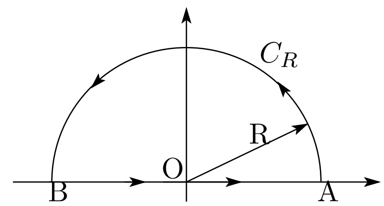
よって、整理すると、

$$I_c - iI_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{15}$$

実部、虚部を比較することによって

$$I_c = I_s = \int_{-\infty}^{\infty} dx\sin x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cos x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{16}$$

2. i).　$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^4 + a^4}$ $(a > 0)$ を求めよ.



$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \frac{1}{z^4 + a^4}$ を考えると、弧 AB での積分は 0 となるので、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \frac{1}{z^4 + a^4} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^4 + a^4} = I_2 \tag{17}$$

また、

$$f_2(z) = \frac{1}{z^4 + a^4} = \frac{1}{(z - ae^{i\frac{\pi}{4}})(z - ae^{i\frac{3}{4}}\pi)(z - ae^{i\frac{5}{4}\pi})(z - e^{i\frac{7}{4}\pi})} \tag{18}$$

なので、C_R の中に孤立特異点（１位の極）は $ae^{i\frac{\pi}{4}}, ae^{i\frac{3}{4}\pi}$ の２つある．よって、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \frac{1}{z^4 + a^4} = 2\pi i \ Resf_2(ae^{i\frac{\pi}{4}}) + 2\pi i \ Resf_2(ae^{i\frac{3}{4}}\pi) \tag{19}$$

また、

$$\begin{aligned}
2\pi i \ Resf_2(e^{i\frac{\pi}{4}}) &= 2\pi i \lim_{z\to ae^{i\frac{\pi}{4}}} (z - ae^{i\frac{\pi}{4}}) f_2(z) && (20)\\
&= 2\pi i \lim_{z\to ae^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{(z - ae^{i\frac{3}{4}\pi})(z - ae^{i\frac{5}{4}\pi})(z - ae^{i\frac{7}{4}\pi})} && (21)\\
&= 2\pi i \frac{1}{(ae^{i\frac{\pi}{4}} - ae^{i\frac{3}{4}\pi})(ae^{i\frac{\pi}{4}} - ae^{i\frac{5}{4}\pi})(ae^{i\frac{\pi}{4}} - ae^{i\frac{7}{4}\pi})} && (22)\\
&= 2\pi i \frac{1}{a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \frac{1}{i(1+i)1} && (23)\\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}(1 - i) && (24)
\end{aligned}$$

同様に

$$2\pi i \ Resf_2(e^{i\frac{3}{4}\pi}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}(1 + i) \tag{25}$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \frac{1}{z^4 + a^4} &= 2\pi i \ Resf_2(e^{i\frac{\pi}{4}}) + 2\pi i \ Resf_2(e^{i\frac{3}{4}\pi}) && (26)\\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}(1 - i) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}(1 + i) && (27)\\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3} && (28)
\end{aligned}$$

よって

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3} \tag{29}$$

ii). $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^{2n}+a^{2n}}$ を求めよ.

2-i) と同様に考えると

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz \frac{1}{z^{2n}+a^{2n}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^{2n}+a^{2n}} = I_n \tag{30}$$

ここで、$z^{2n} = -a^{2n} = e^{i(-\pi+2k\pi)}, (k = 1, 2, 3, \cdots)$ より、$z^{2n} + a^{2n}$ は

$$z = z_k = ae^{i\frac{2k-1}{2n}\pi}(k = 1, 2, 3, \cdots, 2n) \tag{31}$$

で 0 となる. なお、$z_k^{2n} = -a^{2n}$.

よって、

$$f_n(z) = \frac{1}{z^{2n}+a^{2n}} = \frac{1}{(z-ae^{i\frac{1}{2n}\pi})(z-ae^{i\frac{3}{2n}\pi})\cdots(z-ae^{i\frac{4n-1}{2n}\pi})} \tag{32}$$

なので、$f_n(z)$ の孤立特異点（１位の極）は $z_k = ae^{i\frac{2k-1}{2n}\pi}, (k = 1, 2, 3\cdots 2n)$ で与えられる。これは、半径 a の円上に等間隔に分布しているので、そのうち C_R 内（上半面）にあるものは $z_k = ae^{i\frac{2k-1}{2n}\pi}, (k = 1, 2, 3\cdots n)$ の n 個である。

よって、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz \frac{1}{z^{2n}+a^{2n}} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Resf_n(z_k) \tag{33}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
Resf_n(z_k) &= \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{1}{z^{2n}+a^{2n}} && (34)\\
&= \lim_{z\to z_k}\frac{1}{\frac{(z^{2n}+a^{2a})-0}{z-z_k}} && (35)\\
&= \frac{1}{\lim_{z\to z_k}\frac{(z^{2n}+a^{2a})-(z_k^{2n}+a^{2n})}{z-z_k}} && (36)\\
&= \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^{2n}+a^{2n})\Big|_{z=z_k}} && (37)\\
&= \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} && (38)\\
&= \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} && (39)\\
&= -\frac{z_k}{2na^{2n}} && (40)
\end{aligned}
$$

よって、留数の和を求めると（等比級数 $(e^{i\frac{2k-1}{2n}\pi})$ の和より）

$$
\begin{aligned}
2\pi i \sum_{k=1}^{n} Resf_n(z_k) &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{-z_k}{2na^{2n}} && (41)\\
&= -\frac{2\pi i}{2na^{2n}}\sum_{k=1}^{n} ae^{i\frac{2k-1}{2n}\pi} && (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\pi i}{na^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2k-1}{2n}\pi} && (43)\\
&= -\frac{\pi i}{na^{2n-1}}\frac{(e^{i\frac{\pi}{n}})^n-1}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}e^{i\frac{1}{2n}\pi} && (44)\\
&= -\frac{\pi i}{na^{2n-1}}\frac{-1-1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{1}{2n}\pi}}} && (45)\\
&= \frac{\pi}{na^{2n-1}}\frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{2n}}-e^{-i\frac{\pi}{2n}}} && (46)\\
&= \frac{\pi}{na^{2n-1}}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} && (47)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
I_n = \frac{\pi}{na^{2n-1}}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} \tag{48}
$$

特に、$n=4$ のとき

$$
I_4 = \frac{\pi}{2a^3}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3} \tag{49}
$$

となり、確かに i) と一致する。

別解

z_k での留数は以下のようにも求められる。

$$
\begin{aligned}
Resf_n(z_k) &= \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{1}{z^{2n}+a^{2n}} && (50)\\
&= \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{z^{2n}-z_k^{2n}} && (51)\\
&= \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{(z-z_k)(z^{2n-1}+z_kz^{2n-2}+\cdots+z_k^{2n-2}z+z_k^{2n-1})} && (52)\\
&= \lim_{z\to z_k}\frac{1}{z^{2n-1}+z_kz^{2n-2}+\cdots+z_k^{2n-2}z+z_k^{2n-1}} && (53)\\
&= \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} && (54)\\
&= \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} && (55)\\
&= -\frac{z_k}{2na^{2n}} && (56)
\end{aligned}
$$

補足

*1 e^{-z^2} が正則であることの証明

$z=x+iy$ とおくと、

$$e^{-z^2}=e^{-(x^2+2xyi-y^2)}=e^{-x^2+y^2}e^{-2xyi}=e^{-x^2+y^2}(\cos 2xy-i\sin 2xy) \tag{57}$$

よって、$e^{-z^2}=X+iY$ とすると

$$X = e^{-x^2+y^2}\cos 2xy \tag{58}$$
$$Y = -e^{-x^2+y^2}\sin 2xy \tag{59}$$

よって

$$\frac{dX}{dx} = -2xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy-2ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy \tag{60}$$
$$\frac{dX}{dy} = 2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy-2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy \tag{61}$$
$$\frac{dY}{dx} = 2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy-2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy \tag{62}$$
$$\frac{dY}{dy} = -2ye^{-x^2+y^2}\sin 2xy-2xe^{-x^2+y^2}\cos 2xy \tag{63}$$

なので

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{\partial X}{\partial y} \tag{64}$$

より、CR の関係式が成り立つので e^{-z^2} は正則。

*2 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{AB} dz\ e^{-z^2}=0$ の証明

$z=Re^{i\theta}$ とおくと、$\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$, $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ より、

$$|dz|=|iRe^{i\theta}||d\theta|=Rd\theta \tag{65}$$

また

$$\begin{aligned}\left|e^{-z^2}\right| &= \left|e^{-R^2e^{i2\theta}}\right| &(66)\\ &= \left|e^{-R^2\cos 2\theta - iR^2\sin 2\theta}\right| &(67)\\ &= \left|e^{-R^2\cos 2\theta}\right|\left|e^{-iR^2\sin 2\theta}\right| &(68)\\ &= e^{-R^2\cos 2\theta}\times 1 &(69)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\int_{AB} dz\ e^{-z^2}\right| &\leq \int_{AB}|dz|\left|e^{-z^2}\right| &(70)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\ e^{-R^2\cos 2\theta}d\theta &(71)\\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\ e^{-R^2(1-\frac{4}{\pi}\theta)}d\theta &(72)\\ &= R\ e^{-R^2}\left[\frac{\pi}{4}\frac{1}{R^2}e^{R^2\frac{4}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} &(73)\\ &= R\ e^{-R^2}\ \frac{\pi}{4}\frac{1}{R^2}(e^{R^2}-1) &(74)\\ &= \frac{\pi}{4}\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) &(75)\end{aligned}$$

$R\to\infty$ で、$\dfrac{1}{R}\to 0$、$\dfrac{1}{e^{R^2}}\to 0$ より、

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{AB} dz\ e^{-z^2}\right|\leq 0 \tag{76}$$

よって、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} dz\ e^{-z^2}=0 \tag{77}$$