数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第三回レポート解答例 (TA 山田和彦君)

1. C を内側を左にみてまわる曲線として

$I = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ は xy 平面で C の囲む面積 S である.

$J = \frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz$ とするとき,

i). 　$I =$ImJ を示せ.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz && (1)\\ &= \frac{1}{2}\oint_C (x-iy)(dx+idy) && (2)\\ &= \frac{1}{2}\oint_C xdx + i\frac{1}{2}\oint_C xdy - i\frac{1}{2}\oint_C ydx + \frac{1}{2}\oint_C ydy && (3)\\ &= \frac{1}{2}\left(\oint_C xdx + \oint_C ydy\right) + i\frac{1}{2}\left(\oint_C xdy - \oint_C ydx\right) && (4) \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Im}J = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \tag{5}$$

ii). 　C を半径 R の原点中心の円として J を計算し $S =$ImJ を確認せよ.

$$\frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz \text{（}C\text{ は半径 }R\text{ の原点中心の円）} \tag{6}$$

において、$z = Re^{i\theta}$, $(\theta \in \mathrm{R})$ とおくと、

$\theta : 0 \to 2\pi$, $\bar{z} = Re^{-i\theta}$, $\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ となり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Re^{-i\theta}\ iRe^{i\theta}d\theta && (7)\\ &= \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi} id\theta && (8)\\ &= i\pi R^2 && (9) \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Im}J = \pi R^2 = S \tag{10}$$

iii). $A(z=1), B(z=i)$ として C を三角形 $\overrightarrow{OAB}$ として $S=\mathrm{Im}J$ を確認せよ.

区間 OA について $z=t,\ (t\in\mathrm{R})$ とおくと、

$t:0\to 1,\ \bar{z}=t,\ \dfrac{dz}{dt}=1,$ となるので

$$\frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz=\frac{1}{2}\int_0^1 tdt=\frac{1}{4} \tag{11}$$

区間 AB について $z=(1-t)+it,\ (t\in\mathrm{R})$ とおくと、

$t:0\to 1,\ \bar{z}=(1-t)-it,\ \dfrac{dz}{dt}=-1+i,$ となるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t-it)(-1+i)dt && (12)\\
&= \frac{1}{2}(-1+i)\int_0^1 (1-t-it)dt && (13)\\
&= \frac{1}{2}(-1+i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ i\right) && (14)\\
&= \frac{1}{2}\ i && (15)
\end{aligned}$$

区間 BO について $z=(1-t)i,\ (t\in\mathrm{R})$ とおくと、

$t:0\to 1,\ \bar{z}=(-1+t)i,\ \dfrac{dz}{dt}=-i,$ となるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\oint_C \bar{z}dz &= \frac{1}{2}\int_0^1 (-1+t)i\ (-i)dt && (16)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (-1+t)dt && (17)\\
&= -\frac{1}{4} && (18)
\end{aligned}$$

よって、$J=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\ i-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\ i$ より

$$\mathrm{Im}J=\frac{1}{2}=S \tag{19}$$

2. C_R を半径 R の原点中心の上半面の半円（$|z| > R$、反時計周り）として

i). $\displaystyle \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} = \pi i$ を示せ

積分区間の始点、終点をそれぞれ、$Re^{i0}, Re^{i\pi}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} &= \mathrm{Log}(z+1)\ \Big|_{Re^{i0}}^{Re^{i\pi}} && (20)\\
&= \log|z+1| + i\mathrm{Arg}(z+1)\ \Big|_{Re^{i0}}^{Re^{i\pi}} && (21)\\
&= \log|Re^{i\pi}+1| - \log|Re^{i0}+1| && (22)\\
&\quad +i\mathrm{Arg}\left(Re^{i\pi}+1\right) - i\mathrm{Arg}\left(Re^{i0}+1\right) && (23)\\
&= \log\frac{|Re^{i\pi}+1|}{|Re^{i0}+1|} + i\mathrm{Arg}\left(\frac{Re^{i\pi}+1}{Re^{i0}+1}\right) && (24)\\
&= \log\frac{|e^{i\pi}+\frac{1}{R}|}{|e^{i0}+\frac{1}{R}|} + i\mathrm{Arg}\left(\frac{e^{i\pi}+\frac{1}{R}}{e^{i0}+\frac{1}{R}}\right) && (25)
\end{aligned}$$

となり、$R\to\infty$ とすると、$\dfrac{1}{R}$ の項が 0 となるので、

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} &= \log\frac{|e^{i\pi}|}{|e^{i0}|} + i\mathrm{Arg}\left(\frac{e^{i\pi}}{e^{i0}}\right) && (26)\\
&= \log|-1| + i\mathrm{Arg}(-1) && (27)\\
&= i\pi && (28)
\end{aligned}$$

ii). $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z^2+1} = 0$ を示せ

三角不等式より

$$|z^2| - 1 \le |z^2+1| \tag{29}$$

よって、$z = Re^{i\theta}$ とすると、

$$\frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{|z^2|-1} = \frac{1}{R^2-1} \tag{30}$$

となる.

よって、

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z^2+1}\right| &\le \int_{C_R} |dz| \left|\frac{1}{z^2+1}\right| && (31)\\
&\le \int_0^\pi |d\theta| \left|\frac{dz}{d\theta}\right| \left|\frac{1}{z^2+1}\right| && (32)\\
&\le \int_0^\pi d\theta \left|Rie^{i\theta}\right| \frac{1}{R^2-1} && (33)\\
&= \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\ d\theta && (34)\\
&= \frac{R}{R^2-1}\pi && (35)\\
&= \frac{\frac{1}{R}}{1-\frac{1}{R^2}}\pi && (36)
\end{aligned}$$

$R \to \infty$ とすると、$\dfrac{1}{R} \to 0$ なので、$\dfrac{\frac{1}{R}}{1-\frac{1}{R^2}}\pi \to 0$ より、

$$\left|\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z^2+1}\right| \le 0 \tag{37}$$

よって

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z^2+1} = 0 \tag{38}$$

iii). $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{e^{i\frac{1}{10000}z}}{z+1} = 0$ を示せ

$a = \frac{1}{10000}$ とおく.

まず、$z = Re^{i\theta}$ とすると

$$\frac{1}{|z+1|} \le \frac{1}{|z|-1} = \frac{1}{R-1} \tag{39}$$

なので、任意の正数 ϵ に対して、(例えば $R = 1 + \frac{2}{\epsilon}$ とすれば、$\frac{1}{R-1} = \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon$ となり)

$$\frac{1}{|z+1|} \le \epsilon \tag{40}$$

とできる.

また,

$$\left|e^{iaz}\right| = \left|e^{iaRcos\theta - aRsin\theta}\right| = \left|e^{iaRcos\theta}\right|\left|e^{-aRsin\theta}\right| = 1 \times e^{-aRsin\theta} = e^{-aRsin\theta} \tag{41}$$

$$|dz| = \left|iRe^{i\theta}\right||d\theta| = Rd\theta \tag{42}$$

なので、式 (40), (41), (42) と $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta,\ (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ の関係を利用すると

$$\left|\int_{C_R} dz\ \frac{e^{iaz}}{z+1}\right| \le \int_{C_R} |dz|\left|\frac{1}{z+1}\right|\left|e^{iaz}\right| \tag{43}$$

$$= 2\epsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aRsin\theta}d\theta \tag{44}$$

$$\le 2\epsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \tag{45}$$

$$= 2\epsilon R\left(-\frac{\pi}{2aR}\right)\left(e^{-aR} - 1\right) \tag{46}$$

$$= \frac{\pi\epsilon}{a}\left(e^{-aR} - 1\right) \tag{47}$$

$$\le \frac{\pi\epsilon}{a} \tag{48}$$

ここで、$R \to \infty$ とすると、ϵ をいくらでも小さくとれるので

$$\left|\int_{C_R} dz\ \frac{e^{iaz}}{z+1}\right| \to 0 \tag{49}$$

よって

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{e^{i\frac{1}{10000}z}}{z+1} = 0 \tag{50}$$

-別解-

2. C_R を半径 R の原点中心の上半面の半円（$|z| > R$、反時計周り）として

i). $\displaystyle \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} = \pi i$ を示せ

$z = Re^{i\theta}$ とおくと、$\theta : 0 \to \pi$, $\dfrac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ となるので

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}+1}\frac{dz}{d\theta}d\theta \tag{51}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}+1}d\theta \tag{52}$$

ここで、極限と積分の順序を入れ換えると

$$= \int_0^{\pi} \lim_{R\to\infty}\frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}+1}d\theta \tag{53}$$

積分の中身を計算すると、

$$\lim_{R\to\infty}\frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}+1} = \lim_{R\to\infty}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+\frac{1}{R}} \tag{54}$$

$$= \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} \tag{55}$$

$$= i \tag{56}$$

よって

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz\ \frac{1}{z+1} = \int_0^{\pi} id\theta \tag{57}$$

$$= i\pi \tag{58}$$